Educación General Básica - Subnivel Superior

MATEMÁTICA



8.º Grado
TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

8

TEXTO DEL ESTUDIANTE

sm

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministra de Gestión Educativa
Daysi Valentina Rivadeneira Zambrano

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

Matemática 8

PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

Dirección de contenidos editoriales Ecuador
María Alexandra Prócel Alarcón

Creación de contenidos
Luis Humberto Buitrón Aguas

Conceptualización del proyecto para el área
Luis Humberto Buitrón Aguas

Diseño y diagramación
Luis Fernando Hernández Castro

Corrección de estilo
Yolanda Castillo, Sofía Garzón

Imagen de la portada
SM Ediciones Ecuador

Fotografía
Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones Colombia, Shutterstock

Ilustración
Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Impreso en Ecuador
Primera impresión: agosto 2016

Este texto fue revisado por la Universidad Politécnica Salesiana y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 8 de junio de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el buen vivir.

Ministerio de Educación
2016

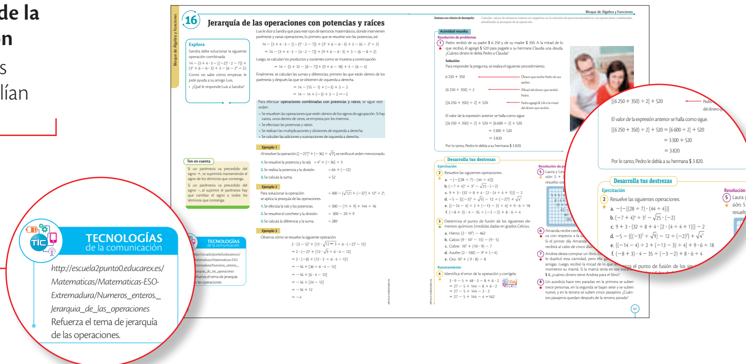
Conoce tu libro

Libro de texto

El libro consta de seis unidades temáticas. Cada unidad desarrolla contenidos asociados a los bloques curriculares propuestos en el currículo nacional: álgebra y funciones, geometría y medida y estadística y probabilidad. **Cada unidad consta de:**

Desarrollo del contenido

Tecnologías de la comunicación
Enlaces a sitios web que amplían los temas.

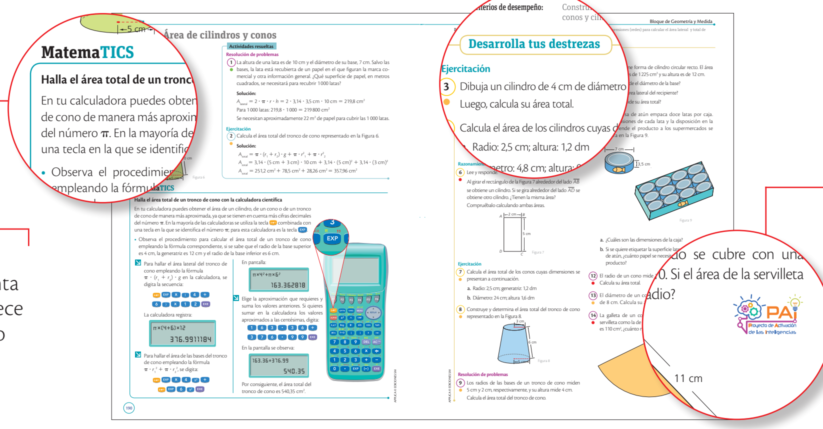


Desarrolla tus destrezas
Actividades clasificadas por destrezas para aplicar los contenidos estudiados.

Las actividades también están clasificadas por nivel de complejidad.

- Básico
- Intermedio
- Avanzado

En los ejercicios desafiantes encontrarás el ícono PAI (Proyecto de Activación de las Inteligencias).



MatemaTICS
Presenta una herramienta informática que enriquece el quehacer matemático mediante el uso de la tecnología.

Desarrollo del contenido

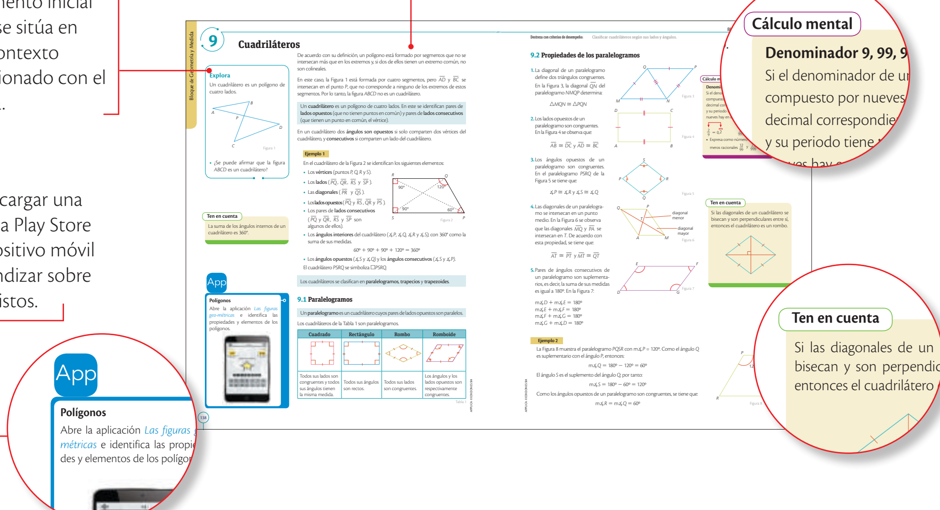
Los temas siguen una ruta didáctica clara y secuencial que empieza con un texto (Explora) para captar tu atención e interés. Continúa con el desarrollo del tema, apoyado por ejemplos y actividades resueltas. Al finalizar cada tema podrás encontrar variados ejercicios en **Desarrolla tus destrezas**.

Cálculo mental
Estrategia que desarrolla habilidades para hacer cálculos sencillos, que pueden ser empleadas en cálculos cada vez más complejos.

Explora
Momento inicial que se sitúa en un contexto relacionado con el tema.

Contenido

App
Invita a descargar una app desde la Play Store de un dispositivo móvil para profundizar sobre los temas vistos.



Ten en cuenta
Texto que activa los conocimientos previos o refuerza las explicaciones facilitando el aprendizaje.

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

1

Números enteros

BLOQUE

Álgebra
y Funciones

Existen evidencias que revelan que los chinos y los hindúes empezaron a utilizar los números negativos desde el siglo V para representar deudas; sin embargo, estos números no fueron admitidos en Occidente sino hasta el siglo XVIII. En la actualidad, los números enteros son utilizados para medir la altitud, el tiempo y la temperatura, entre otros.

- ¿Por qué crees que los números enteros tardaron tantos años en ser aceptados universalmente?



Cultura del Buen Vivir

El servicio

Consiste en ayudar a alguien de manera espontánea, como una actitud permanente de colaboración hacia los demás.

- ¿De qué manera han servido los números enteros al desarrollo de los sistemas financieros mundiales?

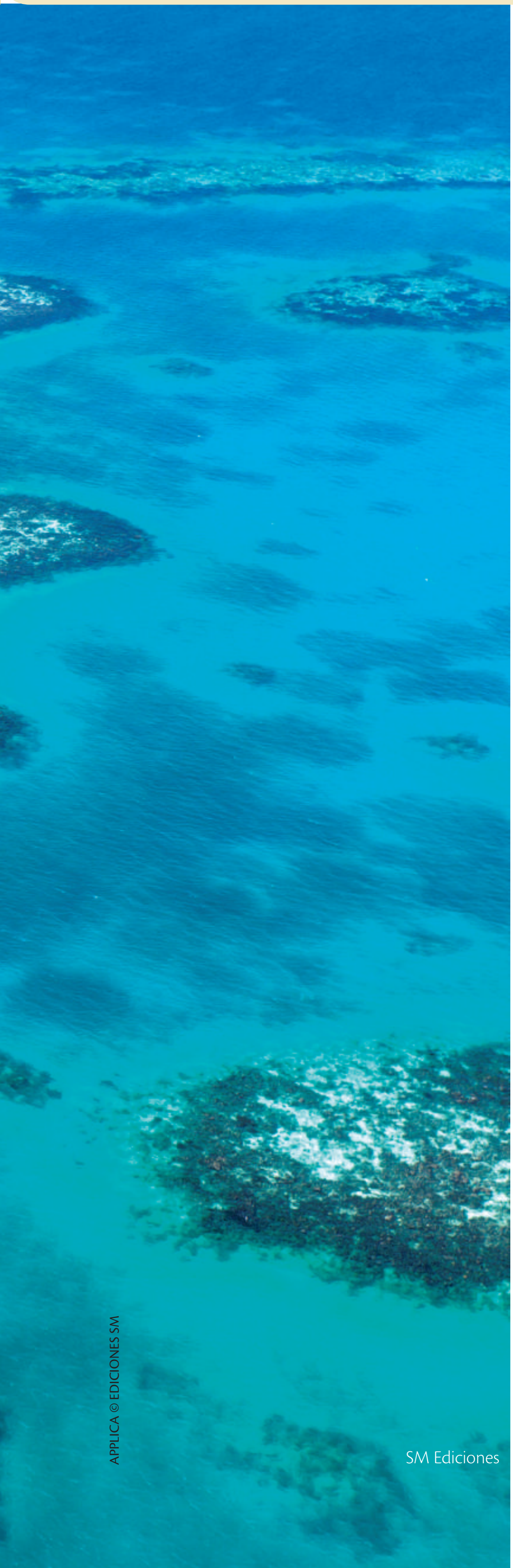
Aprenderás...

- Números enteros y sus operaciones
- Valor absoluto
- Ecuaciones de estructura aditiva y multiplicativa
- Jerarquía de las operaciones

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC
AI
E



SM Ediciones

Misterios profundos

De promedio, los mares de la Tierra tienen 4 000 metros de profundidad (el lugar más profundo, según lo que sabemos, es la Fosa Mariana en el Pacífico, a 11 000 metros de profundidad). Todo lo que se halla debajo de los 200 metros de la superficie es clasificado como "mar profundo", y en general sigue siendo un misterio. Hasta la fecha apenas hemos explorado 10 kilómetros cuadrados de los 300 millones de kilómetros cuadrados de los lechos marinos del planeta.

Lo poco que hemos encontrado es fascinante. Para empezar, el lecho de los océanos, igual que la Tierra, tiene planicies y fosas, cordilleras, volcanes y gargantas. Las temperaturas pueden alcanzar extremos: mientras por la mayoría los mares profundos son helados, en algunos lugares las aguas están hirviendo. En estos respiraderos hidrotermales, las grietas en el lecho del mar vomitan agua tóxica hirviente. Mas pese al calor y a los sulfuros tóxicos, muchas criaturas –incluso gusanos tubulares gigantes, almejas y microorganismos– viven en sus alrededores.

El obstáculo principal para llegar a conocer más sobre los mares profundos es la dificultad de llegar a estas profundidades, explica Ron Douglas, de la Universidad de Cambridge y la City University de Londres. Los humanos apenas podemos bucear entre 30 y 40 metros de profundidad sin ayuda especializada. La presión aumenta 1 atmósfera por cada 10 metros. Y la oscuridad es total: el sol solo penetra a 1 000 metros debajo de la superficie.

Revista Tunza. (consultado en Noviembre 2015)Misterios profundos.
Océanos y costas.Tomo 3, Nº4. pp 6.
Recuperado de http://www.ourplanet.com/tunza/issue0304sp/pdfs/06.pdf

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuáles han sido los obstáculos que le han impedido a la humanidad explorar las profundidades marinas?

Argumenta

2. ¿Por qué crees que la humanidad ha invertido más esfuerzos en conocer el espacio que el fondo del mar?
3. La cima del monte Everest se encuentra a 8 848 m de altura, mientras que el abismo de Challenger se encuentra a 10 971 m de profundidad. ¿Se alcanzaría a sumergir por completo el monte Everest en este abismo?

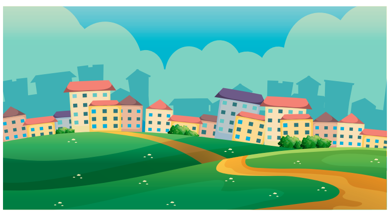
Propón

4. ¿Qué métodos propondrías para facilitar la exploración de los grandes abismos del océano?

1 Números relativos

Explora

Camilo y Sara viven sobre la misma calle en la que se encuentra un parque. La casa de Camilo está tres cuadras antes del parque, y la de Sara está tres cuadras después del parque.



- ¿Cómo son las posiciones de las casas de Camilo y Sara en relación con la ubicación del parque?

1.1 Punto de referencia

La situación planteada se puede representar como en la Figura 1.

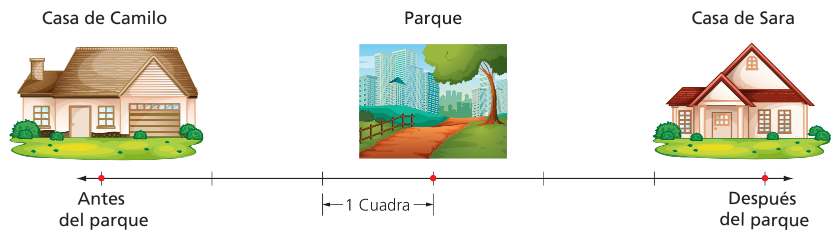


Figura 1

Si se toma la ubicación del parque como **punto de referencia**, se puede afirmar que las casas de Camilo y de Sara están en posiciones opuestas.

Al fijar un **punto de referencia** es posible determinar dos sentidos u orientaciones.

1.2 Números relativos

Los números que indican una cantidad con respecto a un punto de referencia se denominan **números relativos**.

Los números relativos se escriben acompañados por el signo más (+) o por el signo menos (−). Se ha convenido utilizar el signo más para las cantidades que expresan situaciones como "a la derecha de", "encima de", "sobre el nivel del mar", etc., y se utiliza el signo menos para las cantidades que se refieren a situaciones como "antes de", "a la izquierda de", "bajo cero", "bajo el nivel del mar", entre otras.

Por lo tanto, para indicar que Camilo vive tres cuadras antes del parque se utiliza el número −3, y para indicar que Sara vive tres cuadras después del parque se utiliza el número +3.

Ejemplo 1

La ciudad de Esmeraldas fue fundada en 1526 por Bartolomé Ruiz, la ciudad de el Tena fue fundada en 1560 por Gil Ramírez Dávalos y la ciudad de Quito fue fundada en 1534 por Sebastián de Benalcázar. Si se toma como punto de referencia el año de fundación de Quito, ¿cuántos años antes fue fundada la ciudad de Esmeraldas y cuántos años después el Tena?

En la línea de tiempo de la Figura 2, en la que el año 1534 es el punto de referencia, se observa que la ciudad de Esmeraldas fue fundada 8 años antes que Quito. Tal situación puede representarse con el número −8.

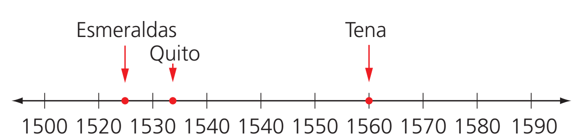


Figura 2

El Tena fue fundada 26 años después que Quito, situación que se puede representar con el número +26.

Los números −8 y +26 son números relativos.

Ten en cuenta

Un **punto de referencia** determina dos sentidos. Se utiliza al establecer expresiones como:

- Arriba de – abajo de
- Sobre el nivel – bajo el nivel
- Antes de – después de
- Atrás de – adelante de
- A la izquierda de – a la derecha de
- Por debajo de – por encima de
- Menos que – más que
- Encima de – debajo de

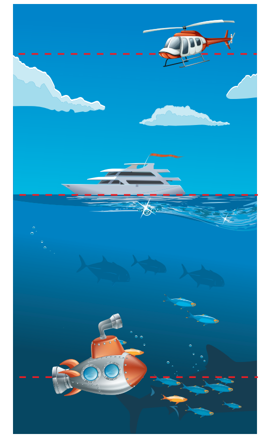
Destreza con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 La Figura 3 representa la ubicación de un helicóptero y de un submarino con respecto al nivel del mar. Si el helicóptero está a 30 m de altura y el submarino está a 40 m de profundidad, ¿cuáles son los números relativos que indican la cantidad de metros a los que se encuentra cada vehículo con respecto al nivel del mar?

Solución:
En este caso, el punto de referencia es el nivel del mar; por lo tanto, la posición "30 m de altura" se expresa mediante el número relativo +30 m, mientras que la posición "40 m de profundidad" se escribe como –40 m.


Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Observa la Figura 4 y escribe los números relativos que expresan la altura de la montaña y la profundidad de la fosa marina.

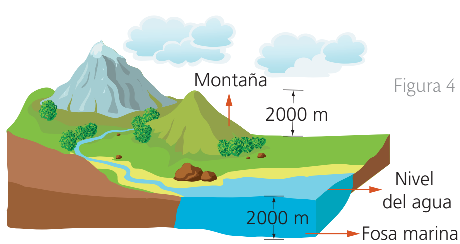


Figura 4

Ejercitación

3 Escribe en la Tabla 1 el punto de referencia y el número relativo correspondiente en cada caso.

Situación	Punto de referencia	Número relativo
Hace seis años Jorge estuvo en Grecia.		
Tres años después de casarme tuve mi primer hijo.		
El avión vuela a 600 m de altura.		
El buzo se encuentra a 25 m de profundidad.		

Tabla 1

4 Representa estas temperaturas con números relativos.

a. 11 °C sobre cero
b. 23 °C bajo cero
c. 6 °C sobre cero
d. 72 °C sobre cero
e. 42 °C bajo cero
f. 19 °C bajo cero
g. 38 °C bajo cero
h. 7 °C sobre cero

Razonamiento

5 Expresa con números relativos cuántos años antes o después del fin de la Segunda Guerra Mundial (1945) ocurrieron estos acontecimientos.

a. Fundación del Estado de Israel (1948)
b. Primer hombre en la Luna (1969)
c. Revolución de Octubre en Rusia (1917)
d. Guerra Civil Española (1936)
e. Guerra Fría (1953)

6 Escribe con números relativos cuántos años antes o después ocurrió el nacimiento de cada uno de los pintores que se muestran en la Tabla 2, tomando como punto de referencia el año de nacimiento de Paul Cézanne.

Pintor	Fecha de nacimiento
Leonardo da Vinci	1452
Pablo Picasso	1881
Giotto di Bondone	1267
Paul Cézanne	1839
Rembrandt van Rijn	1606
Diego Velázquez	1599

Tabla 2

Resolución de problemas

7 Marcela nació en el año 1994. Terminó la secundaria en el 2010 y su carrera universitaria en el 2015. Si se considera como punto de referencia el año en el que terminó la secundaria, ¿cuáles son los números relativos que indican cuántos años antes nació y cuántos años después terminó su carrera universitaria?

2 Números enteros

2.1 El conjunto de los números enteros

Explora

Santiago realizó los siguientes movimientos en su cuenta bancaria: el lunes consignó \$ 300, el martes retiró \$ 120, el miércoles retiró \$ 95 y el jueves consignó \$ 80.



- Representa matemáticamente estos movimientos bancarios.

En ocasiones no es suficiente el conjunto de los números naturales para representar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, los matemáticos de la antigüedad consideraron necesario ampliar este conjunto y comenzar a utilizar los números negativos.

Esta decisión dio origen al **conjunto de los números enteros** ($\mathbb{Z}$), el cual incluye los **enteros negativos** ($\mathbb{Z}^-$), los **enteros positivos** ($\mathbb{Z}^+$) y el **0**.

Los números enteros negativos van precedidos por el signo menos ($-$).

$$\mathbb{Z}^- = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}$$

Los números enteros positivos van precedidos por el signo más ($+$).

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4\ldots\}$$

Así, los números enteros permiten diferenciar la manera en que se registran algunas situaciones como: deudas y haberes, temperaturas sobre cero y temperaturas bajo cero, alturas sobre el nivel del mar y profundidades, entre otras.

En el caso de los movimientos bancarios, se acostumbra a representar las consignaciones precedidas con el signo más y los retiros con el signo menos. Por lo tanto, los movimientos en la cuenta bancaria de Santiago se pueden representar como se muestra en la Tabla 1.

Movimientos	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
Consignación	+\$ 300			+\$ 80
Retiro		−\$ 120	−\$ 95	

Tabla 1

El **conjunto de los números enteros** está formado por los enteros negativos, los enteros positivos y el 0.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\ldots\}$$

Ten en cuenta

- El 0 es el único número entero que no tiene signo: no es positivo ni negativo.
- Los números enteros positivos coinciden con los números naturales; por eso, es común que al escribir un número entero positivo se omita el signo más ($+$).

Ejemplo 1

Al tomar 0 °C como punto de referencia (temperatura nula), se puede representar una temperatura de 13 °C bajo cero con el número entero negativo -13 °C y una temperatura extrema de 38 °C como $+38$ °C.

Ejemplo 2

Para expresar la fecha de ocurrencia de diferentes acontecimientos, se ha convenido tomar como referencia o punto 0 el año de nacimiento de Cristo. Por esta razón, las fechas anteriores al nacimiento de Cristo se escriben precedidas por el signo menos ($-$) y, las posteriores, con el signo más ($+$).

Por ejemplo, el suceso "Euclides, geómetra griego, nació en el año 306 a. C. y murió en el año 283 a. C." se puede expresar así: "Euclides, geómetra griego, nació en el año -306 y murió en el año -283".

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Ejemplo 3

En las tablas 2 y 3 se registró la altura y la profundidad (respectivamente) de algunos lugares del mundo. En ambos casos se emplearon números enteros.

Picos más altos del mundo	Altura
Dhaulagiri (Nepal)	+8 167 m
Montaña Manaslu (Nepal)	+8 156 m
Nanga Parbat (Pakistán)	+8 125 m
Annapurna (Nepal)	+8 091 m

Tabla 2

Algunos lugares profundos del mundo	Profundidad
Pozo de Kola (Rusia)	−13 km
Perforación submarina (Nueva Zelanda)	−2 km
Mina del Cañón de Bingham (Estados Unidos)	−1,2 km
Cueva de Vrtoglavica (Eslovenia)	−603 m

Tabla 3



Pico Annapurna (Nepal): 8 091 m de altura

2.2 Opuesto de un número entero

Cada elemento del conjunto de los enteros positivos tiene un opuesto en el conjunto de los enteros negativos, y viceversa. El **opuesto de un número entero** a se simboliza como $-a$.

Ejemplo 4

Se cumple que:

−3	+10	+8	−6
↓	↓	↓	↓
es el opuesto de	es el opuesto de	es el opuesto de	es el opuesto de
↓	↓	↓	↓
+3	−10	−8	+6

Ejemplo 5

Las expresiones −(−9) y −[−(−7)] son respectivamente equivalentes a +9 y −7, porque el opuesto de −9 es +9 y el opuesto de −(−7) es −7.

2.3 Números enteros en la recta numérica

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica como sigue.

1. Sobre una recta horizontal se marca un punto que represente el 0.
2. Se fija la distancia del 0 al 1. Esta medida se toma como unidad y se traslada a la derecha y a la izquierda del 0 tantas veces como sea necesario (Figura 1).

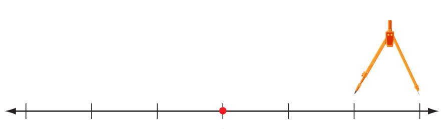


Figura 1

3. Se sitúan a la derecha del 0 los números enteros positivos y a la izquierda los números enteros negativos (Figura 2).

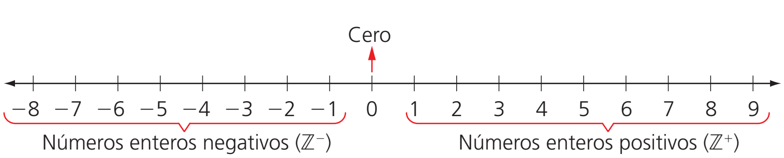


Figura 2

Ten en cuenta

El siguiente mapa conceptual representa la relación que existe entre los números enteros y los números naturales.

- **Números enteros** — Conjunto formado por:
  - Números negativos — que son → −∞,..., −4, −3, −2, −1
  - Números naturales — a su vez formado por:
    - El cero
    - Números positivos — que son → 1, 2, 3, 4,..., ∞

2 Números enteros

Ten en cuenta

El cero (0) tardó mucho tiempo en utilizarse. En la mayoría de los sistemas numéricos antiguos no existía este número. Se cree que fueron los hindúes los que lo utilizaron por primera vez hacia el año 650 d. C.

Ejemplo 6

En la recta de la Figura 3 se marcaron los números enteros 8, −4, −9, 5, −1 y 0. Observa.

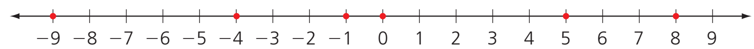


Figura 3

Ejemplo 7

En la Figura 4 se ubicaron los números enteros comprendidos entre −7 y 5.

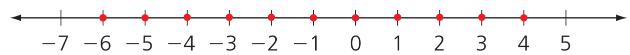


Figura 4

Ejemplo 8

En la representación de la recta numérica se observa que dos números enteros opuestos están a la misma distancia de 0, pero en lados contrarios. Por ejemplo, en la Figura 5 se representan los números opuestos −4 y 4 .

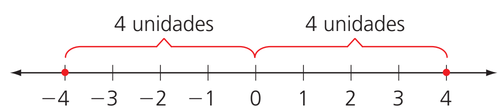


Figura 5

Se observa que la distancia entre −4 y 0 es la misma que entre 0 y 4: 4 unidades.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.
   - **a.** El conjunto de los números naturales está contenido en el de los enteros.
   - **b.** El 0 es un número entero positivo.
   - **c.** $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^-$
   - **d.** $-[-(-10)] = -10$

Solución:

El valor de verdad de cada afirmación es:

- **a.** Verdadero. Todo número natural es entero positivo.
- **b.** Falso. El 0 es el único número entero que no es positivo ni negativo.
- **c.** Falso. El conjunto $\mathbb{Z}^-$ está contenido en el conjunto $\mathbb{Z}$.
- **d.** Verdadero. El opuesto de $[-(-10)]$ es -10.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Escribe un número entero que exprese la cantidad mencionada en cada caso.
   - **a.** La cima de la montaña está a 568 m de altura.
   - **b.** Pitágoras nació en el siglo VI a. C.
   - **c.** El submarino está a 120 m de profundidad.
   - **d.** La temperatura de la ciudad es de 5 ºC bajo cero.
   - **e.** Pablo consignó $ 500 en su cuenta de ahorros.
   - **f.** Sofía debe $ 350 al banco.

3. Explica el significado de los números enteros utilizados en las siguientes expresiones.
   - **a.** La temperatura mínima registrada hoy fue de −3 ºC.
   - **b.** El buzo se encuentra a −50 m.
   - **c.** El alpinista está a +600 m.
   - **d.** El ascensor quedó detenido en el piso −2.
   - **e.** La Edad Media comenzó aproximadamente hacia el año +476.
   - **f.** El estado de cuenta es de $ 700.

Razonamiento

4 Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda.

a. -25 .... $\mathbb{Z}^-$ b. 34 .... $\mathbb{Z}^+$

c. -67 .... $\mathbb{Z}^+$ d. 58 .... $\mathbb{Z}^-$

e. -46 .... $\mathbb{Z}^+$ f. 31 .... $\mathbb{Z}^+$

g. -15 .... $\mathbb{Z}^-$ h. 72 .... $\mathbb{Z}^-$

5 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El opuesto de un entero negativo es negativo. ( )

b. El opuesto del opuesto de un número positivo es negativo. ( )

c. La distancia entre dos números opuestos es el doble de la distancia entre uno de los números y el 0. ( )

d. El opuesto de un número entero positivo es negativo. ( )

6 Determina y escribe el número entero que debe ir en cada casilla.

a.

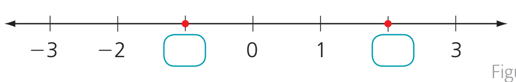


Figura 6

b.

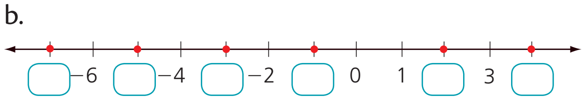


Figura 7

c.

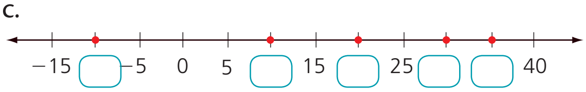


Figura 8

d.

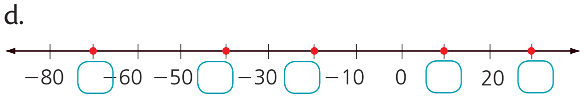


Figura 9

Comunicación

7 Ubica los números de cada grupo en la recta numérica.

a. $5, -6, -4, 3, -2, 6$

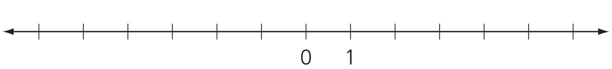


Figura 10

b. $-10, -6, 8, 4, -2, 12$

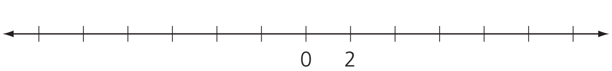


Figura 11

c. $-12, -18, -9, 6, 15, -6$

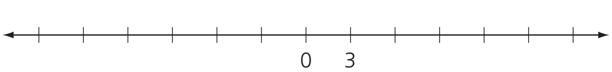


Figura 12

Razonamiento

8 Observa la Figura 13 y resuelve.

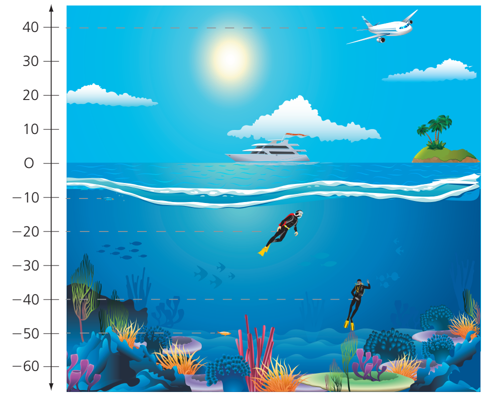


Figura 13

a. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra cada uno de los buzos?

b. ¿A qué altura con respecto al nivel del mar se encuentra el avión?

c. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra el pez amarillo?

d. ¿En qué punto con respecto al nivel del mar se encuentra el barco?

e. ¿Qué distancia separa el avión del pez más amarillo?

Resolución de problemas

9 Analiza cada situación y responde las preguntas.

a. ¿Qué número se encuentra 4 unidades a la izquierda de -1? ¿Cuál es su opuesto?

b. El entero m está 5 unidades a la izquierda de n. Si $n = -2$, ¿cuál es el valor de m?

c. Desde a hasta b hay 8 unidades. Si $a = -3$, ¿qué valores puede tener b?

d. Los enteros m y n están separados por 10 unidades. Si la distancia de m a 0 es de 3 unidades, ¿cuáles son las posibles distancias de n a 0?

e. Un número positivo está al doble de unidades de 0 que un número negativo, y los dos están separados por 27 unidades. ¿Cuáles son esos números?

10 Para atrapar un pez, dos gaviotas se sumergen en el mar. La primera se sumerge a 45 cm y la otra, a 60 cm. Si el pez se encuentra a 50 cm de profundidad, ¿cuál de las dos gaviotas está más cerca de alcanzarlo?

3 Valor absoluto de un número entero

Explora

Dos ciclistas parten de un mismo punto en sentidos opuestos y hacen un recorrido en línea recta.



- Si los dos van a una velocidad de 50 km/h, ¿qué distancia separa a cada ciclista del punto de partida al cabo de una hora de recorrido?

La ubicación de los ciclistas se puede representar en una recta numérica como la de la Figura 1.

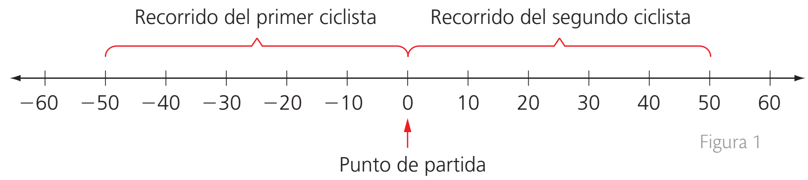


Figura 1

Se observa que, después de una hora de recorrido, el primer ciclista se encuentra a -50 km del punto de partida, mientras que el segundo está a $+50$ km. Sin embargo, los ciclistas están a la misma distancia del punto de partida, es decir, 50 km.

Se dice entonces que los números enteros -50 y $+50$ tienen el mismo **valor absoluto**, pues en la recta numérica están a igual distancia de 0.

El **valor absoluto de un número entero** es la distancia que separa al número del cero en la recta numérica. Esta medida siempre es una cantidad positiva.
El valor absoluto de un número entero a se simboliza como $|a|$.

Ejemplo 1

El valor absoluto de $+14$ es 14 porque, en la recta numérica, la distancia de $+14$ a 0 es de 14 unidades. Se escribe $|+14| = 14$. Observa la Figura 2.

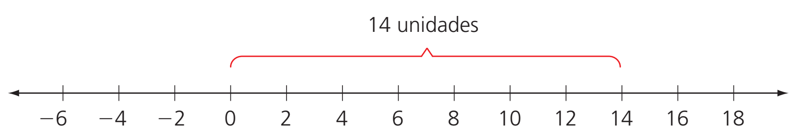


Figura 2

Ten en cuenta

El valor absoluto de un número entero a se representa simbólicamente de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ Si } a \geq 0 \\ -a, \text{ Si } a < 0 \end{cases}$$

Actividades resueltas

Comunicación

1 Calcula los siguientes valores absolutos. Justifica en cada caso.

a. $|-6|$ **b.** $|+12|$ **c.** $|-7|$ **d.** $|0|$

Solución:

a. $|-6| = 6$, ya que -6 está a 6 unidades de 0 en la recta numérica.

b. $|+12| = 12$, porque entre $+12$ y 0 hay 12 unidades de distancia.

c. $|-7| = 7$, puesto que hay 7 unidades entre -7 y 0.

d. $|0| = 0$, porque entre 0 y el mismo hay 0 unidades.

2 Escribe el número entero que cumple cada condición.

a. Su valor absoluto es 7 y está entre -10 y 3.

b. Su valor absoluto es 9.

c. Su valor absoluto es igual al de -4.

d. Es el opuesto del número cuyo valor absoluto es 6.

Solución:

a. -7 **b.** 9 o -9

c. 4 **d.** 6 o -6

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Determina estos valores absolutos.

a. $|-3|$ b. $|54|$ c. $|0|$
d. $|-(-11)|$ e. $|-6|$ f. $|-(-5)|$
g. $|-a|$ h. $|-x|$ i. $|1+0|$

4 Calcula el resultado de cada operación.

a. $|-3| \cdot |8|$ b. $|-9| + |-13|$
c. $|-25| \div |5|$ d. $|-30| \div |-10|$
e. $|-8| \cdot |-4|$ f. $|-5| + |-10|$
g. $|2| \cdot |-9|$ h. $|-24| \div |6|$

Razonamiento

5 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El valor absoluto de un número siempre es un entero positivo.. ( )
b. El valor absoluto de 0 es 1. ( )
c. El valor absoluto de un número entero *a* positivo siempre es $-a$. ( )

6 Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera.

a. $|x| = 15$ b. $|-3| = x$
c. $|-x| = 7$ d. $|x| = 0$
e. $|8| = x$ f. $|-(-13)| = x$
g. $|x-3| = 12$ h. $|x| = -11$

Comunicación

7 Encuentra, en cada caso, el número entero que cumple la condición dada.

a. Su valor absoluto es 8 y está a la izquierda de 0.
b. Su valor absoluto es 3 y está situado entre -4 y -2.
c. Su valor absoluto es igual que el de su opuesto.
d. Su valor absoluto es 15 y es menor que 9.
e. Su valor absoluto es 4 y se representa en la recta numérica a la derecha de -12.
f. Su valor absoluto es 12.
g. El valor absoluto de su opuesto es 7.

8 Responde.

Si *a* es un número entero, ¿cuál es el valor absoluto de $-[-(-a)]$?

Razonamiento

9 Señala con una X si la afirmación es verdadera o falsa.

	V	F
a. $|-1| = 1$	( )	( )
b. $|1| = -1$	( )	( )
c. $|8-6| = |6-8|$	( )	( )
d. $|0-3| = |3-0|$	( )	( )
e. $|-6+3| = |3-6|$	( )	( )
f. $-|5| = -5$	( )	( )
g. $-|5| = 5$	( )	( )

10 Escribe el número que cumple simultáneamente estas condiciones.

a. Su valor absoluto es mayor que 5 y menor que 9.
b. Está comprendido entre -10 y 7.
c. Su valor absoluto es menor que 5 y mayor que 3.

11 Explica cuál puede ser la ubicación de dos puntos *A* y *B* sobre la recta numérica, si:

$$|A - B| = 13$$

Resolución de problemas

12 Buscando una dirección, Alejandro caminó inicialmente siete cuadras en una dirección. Luego, se desplazó tres cuadras en la dirección contraria. ¿Cuántas cuadras caminó en total?

13 Valeria hizo la siguiente afirmación: "Mi hermano recorre una distancia de -400 m de la casa hacia el colegio". ¿Consideras que la afirmación es correcta o incorrecta? Explica.

14 Un vehículo sale del estacionamiento y se desplaza 40 m al norte. Luego, se devuelve sobre la misma calle y se traslada 70 m hacia el sur y, finalmente, se mueve 20 m hacia el sur. ¿Cuántos metros recorrió en total el vehículo?

15 Un pájaro elevándose en el aire, y un buzo sumergido en el mar, se encuentran a la misma distancia del nivel del mar. ¿A qué altura se encuentra el pájaro y a qué profundidad el buzo, si los separan 86 m?

4 Orden en los números enteros

Explora

Sofía registró en la Tabla 1 la temperatura de tres cuartos fríos de un laboratorio.

Cuarto	Temperatura
A	−2 °C
B	−8 °C
C	−5 °C

Tabla 1



- Según esta información, ¿en cuál de los tres cuartos hace más frío?

Para determinar en cuál de los cuartos hace más frío, se pueden representar las temperaturas en una recta numérica y luego comparar su ubicación (Figura 1).

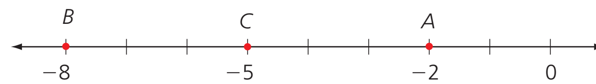


Figura 1

Cuando se comparan dos números enteros en la recta numérica, se deduce que es mayor el número que se encuentra ubicado a la derecha del otro. A su vez, es menor el que se encuentra ubicado a la izquierda.

De acuerdo con lo anterior, se pueden establecer las siguientes relaciones de orden:

- Como −2 está a la derecha de −5, entonces $-5 < -2$.
- Como −5 está a la derecha de −8, entonces $-8 < -5$.
- Como −2 está a la derecha de −8, entonces $-8 < -2$.

Esto quiere decir que el orden de las temperaturas es:

Temperatura del cuarto *B*		Temperatura del cuarto *C*		Temperatura del cuarto *A*
↓		↓		↓
−8 °C	<	−5 °C	<	−2 °C

Por lo tanto, en el cuarto *B* es en el que hace más frío.

Si dos números enteros *a* y *b* están representados en la recta numérica, entonces $a > b$, siempre que *a* esté ubicado a la derecha de *b*.

Otros criterios que permiten determinar la relación de orden existente entre dos números enteros son:

- Dados dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Dados dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo.

Ten en cuenta

El cero es menor que cualquier entero positivo y mayor que cualquier entero negativo.

Actividad resuelta

Comunicación

1. Escribe cuatro afirmaciones verdaderas en relación con la información de la Figura 2.

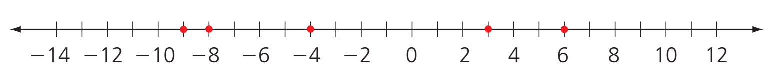


Figura 2

Solución:

Algunas afirmaciones que se pueden emitir con respecto a la información de la recta numérica son las siguientes:

- $-8 < -4$, ya que −4 está a la derecha de −8.
- 6 es el mayor de los números representados, puesto que está ubicado a la derecha de todos los demás.
- $3 > -9$, porque un número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo.
- El orden de los números de menor a mayor es:

$$-9 < -8 < -4 < 3 < 6$$

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa cada pareja de números enteros en la recta numérica. Luego, escribe > o <, según sea el caso.

a. −3 ☐ 1

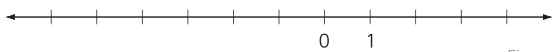


Figura 3

b. 4 ☐ −6

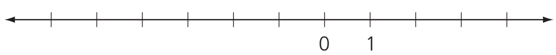


Figura 4

c. −5 ☐ −8

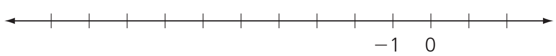


Figura 5

d. 6 ☐ −3

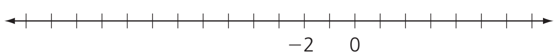


Figura 6

3 Escribe el signo > o <, según corresponda.

a. +4 ☐ +1 b. −1 ☐ −6
c. 0 ☐ +3 d. −8 ☐ +2
e. −2 ☐ 0 f. +5 ☐ −9
g. −78 ☐ 26 h. −27 ☐ −49
i. 47 ☐ 38 j. 19 ☐ −29
k. −18 ☐ 36 l. −54 ☐ −29
m. 45 ☐ −36 n. 29 ☐ −98
ñ. −19 ☐ −18 o. 0 ☐ −2

Comunicación

4 Completa la Tabla 2.

Anterior	Número	Siguiente
	−210	
	+245	
	−62	
	+299	
	−157	
	−302	

Tabla 2

5 Ordena de menor a mayor los números de cada grupo.

a. 25, −32, 24, −1, 0, −12
b. 12, 7, −20, 16, −13
c. −54, 678, −249, 14, −24, 0, 190
d. 32, 56, 17, −8, −41

Razonamiento

6 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. 3 está entre 1 y −1. ( )
b. −1 está entre −3 y 0. ( )
c. −2 está entre 0 y 5. ( )
d. 2 está entre −1 y 1. ( )
e. 3 está entre −5 y 5. ( )

7 Escribe un número que cumpla la condición que se enuncia en cada caso.

a. −6 < ☐ b. ☐ > −5 > ☐
c. |−8| = ☐ d. −21 < ☐ < ☐
e. −4 < ☐ < 8 f. −2 < ☐ < 0

8 Representa en la recta numérica los números enteros que cumplan cada una de las condiciones dadas.

a. Son mayores que −12 y menores que +6.
b. Son menores que +24 y mayores que −1.
c. Son menores que +8 y mayores que −7.
d. Son menores que −7 y mayores que −24.

Resolución de problemas

9 En la Tabla 3 se presentan los puntos de ebullición aproximados de algunos elementos de la tabla periódica.

Elemento químico	Punto de ebullición (ºC)
Flúor	−188
Hidrógeno	−253
Argón	−186
Helio	−269
Nitrógeno	−196
Neón	−246

Tabla 3

a. ¿Cuál es el elemento químico con el mayor punto de ebullición? ¿Y con el menor?
b. Ordena, de menor a mayor, los elementos periódicos de la tabla según sus puntos de ebullición.

10 Tres fosas marinas tienen una profundidad de −5 534 m, −6 524 m y −4 321 m, respectivamente. ¿Cuál de las tres fosas marinas tiene mayor profundidad? ¿Cuál de las fosas es menos profunda?

5 Adición de números enteros

Explora

En una exploración del fondo marino, un buzo se sumerge, en un primer momento, a 45 m de profundidad y al cabo de una hora desciende otros 27 m.



- En total, ¿cuántos metros descendió el buzo durante la exploración?

5.1 Adición de números enteros del mismo signo

Para resolver la situación, se pueden sumar las distancias recorridas por el buzo en su descenso; es decir, se efectúa una **adición de números enteros**.

Primer descenso (m) → -45 + (-27) ← Segundo descenso (m)

En la Figura 1 se muestra la representación de esta adición.

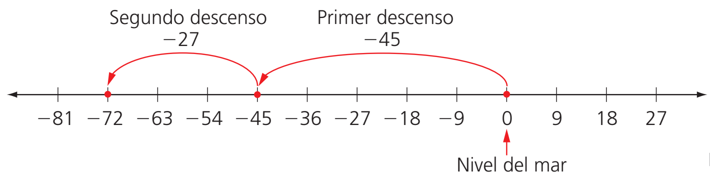


Figura 1.

Por lo tanto:

$$-45 + (-27) = -72$$

Analíticamente, el resultado anterior es equivalente a la suma de los valores absolutos de los sumandos, precedida por el signo común de los números -45 y -27. Esto es:

Suma de los valores absolutos de los sumandos

Signo común → $-\,(|-45| + |-27|) = -\,(45 + 27) = -\,72$

Se deduce entonces que el buzo descendió 72 m en total.

En la **adición de números enteros del mismo signo**, se suman los valores absolutos de los sumandos y a esta suma se le antepone el signo que tienen en común.

5.2 Adición de números enteros de diferente signo

En la **adición de números enteros de diferente signo**, se restan los valores absolutos de los sumandos y a la suma se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplo 1

Para efectuar la operación $-9 + 12$ se procede así:

a. Se calculan los valores absolutos de los dos sumandos. $|-9| = 9$ y $|12| = 12$

b. Al mayor valor absoluto se le resta el menor valor. $12 - 9 = 3$

c. Al resultado se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto. $-9 + 12 = +3$

La suma $-9 + 12$ se puede representar como en la Figura 2.

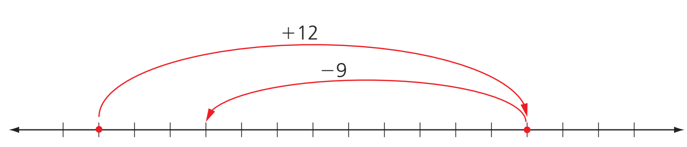


Figura 2

Ten en cuenta

La notación (+) y (−) para los números enteros positivos y negativos fue propuesta por el matemático alemán Stifel (1487 − 1567) en el siglo XVI.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (adición) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

5.3 Propiedades de la adición de números enteros

La adición de números enteros cumple con las propiedades que se presentan en la Tabla 1.

Propiedad	Descripción	Ejemplo
Clausurativa	La adición de dos o más números enteros es otro número entero.	$(-20) + (-39) = -59$
Conmutativa	En la adición de números enteros, el orden de los sumandos no altera la suma.	$(-25) + 45 = 45 + (-25)$ $20 = 20$
Asociativa	Se pueden asociar los sumandos de varias formas y el resultado no se altera.	• $(-23 + 24) + (-4)$ $= 1 + (-4) = -3$ • $-23 + [24 + (-4)]$ $= -23 + 20 = -3$
Modulativa	Todo número entero sumado con el 0 da como resultado el mismo número entero.	$0 + (-12) = (-12) + 0$ $-12 = -12$
Invertiva	Todo número entero sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$25 + (-25) = (-25) + 25$ $0 = 0$

Tabla 1

Ten en cuenta

El opuesto de un número entero también se denomina **inverso aditivo**.

5.4 Adición de varios números enteros

Las propiedades de la adición de números enteros permiten efectuar la adición de tres o más números enteros de dos maneras equivalentes.

- Se suman los números de dos en dos, de forma consecutiva.

$$25 + (-32) + (-12) + 23$$
$$= -7 + (-12) + 23$$
$$= -19 + 23$$
$$= 4$$

- Se suman por separado los números positivos y los negativos, y luego se resuelven las operaciones resultantes.

$$25 + (-32) + (-12) + 23$$
$$= 25 + 23 + (-32) + (-12)$$
$$= 48 + (-44)$$
$$= 4$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Luis hizo dos compras con su tarjeta de crédito: una por \$ 296 y otra por \$ 103. Antes de hacer las compras tenía un saldo a favor de \$ 229, entonces abonó a la tarjeta \$ 130. ¿Qué saldo tiene después del abono?

Solución:

Para resolver el problema, se puede efectuar la siguiente adición de números enteros aplicando las propiedades.

Saldo a favor		Costo de la primera compra		Costo de la segunda compra		Abono
229	+	(−296)	+	(−103)	+	130

$$= 229 + 130 + (-296) + (-103)$$
$$= 359 + (-399)$$
$$= -40$$

Por tanto, Luis tiene un saldo en contra de \$ 40.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.ematematicas.net/opentoros.php?op=suma

Practica la adición de números enteros.

5 Adición de números enteros

MatemaTICS



Calcula con números negativos

Identifica en tu calculadora científica las teclas ( ) y −. Estas te permitirán introducir cualquier adición de números enteros.

Ahora, observa la secuencia que debes ingresar en tu calculadora para efectuar la operación 18 + (−27) + (−19).

1 8 + (− 2 7) + (− 1 9) EXE

Con ello obtendrás el siguiente resultado:

18+(-27)+(-19)
-28

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Relaciona cada adición con la representación en la recta numérica que le corresponde.

a. −4 + (−3) b. 6 + 5

c. −2 + 7 d. −8 + 5

( )

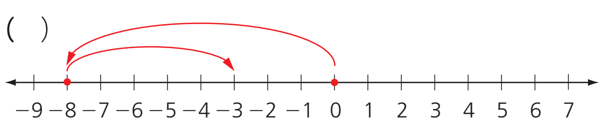


Figura 3

( )

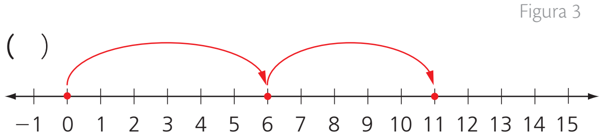


Figura 4

( )

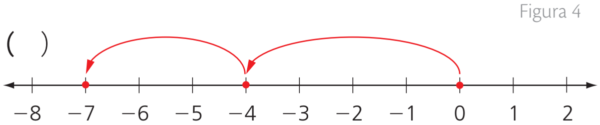


Figura 5

( )

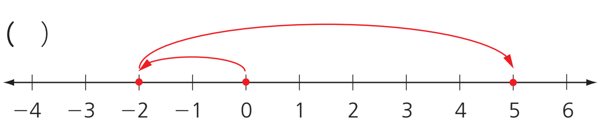


Figura 6

3 Calcula la suma en cada caso.

a. 19 + (−12) b. −82 + 9

c. 6 + (−27) d. 18 + (−2)

e. −8 + 4 f. −12 + (−11)

g. 37 + (−7) h. −19 + (−13)

i. 25 + (−17) j. −89 + (−1)

Comunicación

4 Completa la Tabla 2.

a	b	$a + b$	$a + (-b)$
−5	−16		
6	−18		
−12	24		
18	31		
−25	−17		
31	−41		

Tabla 2

Razonamiento

5 Escribe, en cada caso, el valor de la letra y la propiedad de la adición que se utilizó.

a. $15 + (-8 + x) = [15 + (-8)] + (-7)$

b. $13 + y = 0$

c. $-23 + 54 = x + (-23)$

d. $27 + (-27) = z$

Ejercitación

6 Efectúa las siguientes adiciones.

a. (+4) + (−6) + (−8) + (+10) + (−2)

b. (+8) + (−60) + (+16) + (+5) + (−4)

c. (−10) + (−8) + (+1) + (−6) + (−30)

d. (−10) + (+2) + (−5) + (+6) + (−8)

e. (+7) + (−2) + (+9) + (+3) + (−2)

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (adición) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Comunicación

7 Responde.

¿Qué obtienes si al número entero 349 le sumas 85 y al resultado le sumas −434? ¿Qué propiedad de la adición cumple este resultado?

Razonamiento

8 Completa la pirámide numérica de la Figura 7. Ten en cuenta la información de la pirámide de la izquierda.

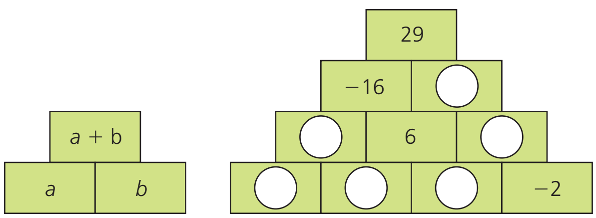


Figura 7

9 Completa cada cuadrado mágico con números enteros de tal manera que la suma de sus columnas, filas y diagonales sea la misma.

a.

5		
	1	
10		−3

b.

−8		
	−3	0
		2

c.

7		
−6		
5		−3

d.

	−7	
−9		
−4		−8

10 Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa.

a. El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número. ( )

b. Al adicionar números enteros que están a la izquierda del 0, se obtiene un número entero negativo. ( )

c. La suma de dos enteros negativos es negativa. ( )

d. La suma de dos enteros positivos es positiva. ( )

e. Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado 1. ( )

11 Encuentra y corrige el error en las siguientes adiciones de números enteros.

a. $-13 + 46 + (-17) + 8 + (+5)$
$= -13 + (-17) + 46 + 5 + 8$
$= 30 + 59$
$= 89$

b. $-45 + 4 + (-7) + 8 + (-5)$
$= 4 + 8 + (-45) + (-7) + (-5)$
$= -12 + 57$
$= -45$

Resolución de problemas

12 Tres niñas recibieron de sus padres cierta cantidad de dinero para ir de compras. La primera recibe $ 55, la segunda $ 5 más que la primera y la tercera recibe la suma de las otras dos juntas. ¿Cuánto recibió cada niña?

13 Pitágoras, famoso filósofo y matemático griego, nació en el año 571 a. C. Según la historia, este personaje murió a los 85 años de edad. ¿En qué año murió Pitágoras?

14 La invención de la escritura data del año 3000 a. C. ¿Cuántos años han transcurrido hasta hoy?

15 La temperatura actualmente es de 5 °C pero la radio dice que descenderá 9 °C más. ¿Cuál será entonces la temperatura al cabo de un rato?

16 Tomás abordó un ascensor en el primer piso de un edificio e hizo este recorrido: subió hasta el piso 22, luego subió cinco pisos más, descendió seis pisos, subió tres y, finalmente, descendió nueve. ¿A qué piso llegó Tomás?

17 Un termómetro marca −3 °C a las 5:00 a. m.; dos horas después, la temperatura aumenta 2 °C. A las 11:00 a. m. el termómetro señala una temperatura de 19 °C, y tres horas después marca 13 °C. ¿Qué variación sufrió el termómetro entre las 7:00 a. m. y las 2:00 p. m.?

18 Tiberio Claudio César Augusto Germánico, historiador y político romano, nació el 1 agosto del año 11 a. C. y murió el 13 octubre del año 54 d. C. ¿Cuántos años vivió?

19 La adición de dos números es –17. Calcula el número menor, si el mayor es –8.

6 Sustracción de números enteros

Explora

Cleopatra, famosa reina de Egipto, falleció en el año 30 a. C., cuando tenía 39 años de edad.



- ¿En qué año nació Cleopatra?

Para averiguar el año de nacimiento de Cleopatra, se puede efectuar la siguiente **sustracción de números enteros.**

Año en que falleció → -30 $-$ 39 ← Edad a la que falleció

Una sustracción de números enteros es equivalente a la adición del minuendo con el opuesto del sustraendo. En este caso,

$$-30 - 39 \text{ es equivalente a } -30 + (-39)$$

Por lo tanto:

$$-30 - 39 = -30 + (-39) = -69$$

Según el anterior resultado, Cleopatra nació en el año 69 a. C.

Si a y b son dos números enteros, entonces la sustracción entre a y b expresada como $a - b$ es equivalente a $a + (-b)$.

Ejemplo 1

La sustracción $23 - 45$ se puede efectuar como se muestra a continuación.

$$23 - 45 = 23 + (-45) = -22$$

Ejemplo 2

Una sustracción de números enteros se puede expresar como una adición y, por tanto, se puede representar en la recta numérica. Observa.

a. $12 - (-10) = 12 + 10 = 22$

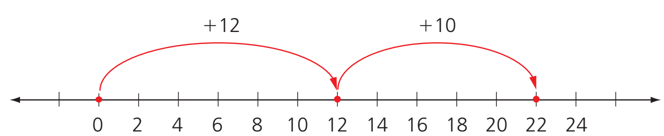


Figura 1

b. $36 - 27 = 36 + (-27) = 9$

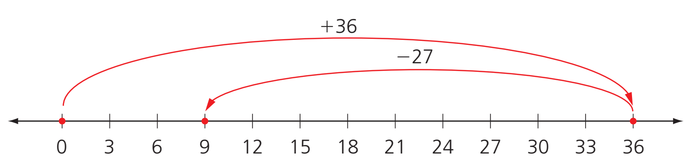


Figura 2

c. $-16 - 24 = -16 + (-24) = -40$

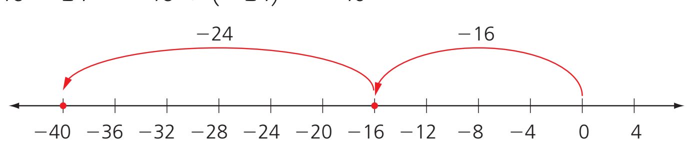


Figura 3

d. $-8 - (-5) = -8 + 5 = -3$

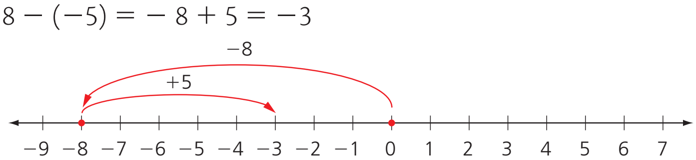


Figura 4

CULTURA del Buen Vivir

El servicio

Es una cualidad de algunas personas que se manifiesta con la colaboración desinteresada hacia los demás.

- Describe dos situaciones en las que consideres que has servido a tus compañeros.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (sustracción) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 La temperatura de un refrigerador es de 12 °C bajo cero. Si dicha temperatura disminuye 7 °C más, ¿cuál es la nueva temperatura del refrigerador?

Solución:

La situación se puede resolver efectuando una sustracción.

Temperatura inicial del refrigerador (°C) → -12 $-$ 7 ← Disminución de la temperatura (°C)

Esto es:

$$-12 - 7 = -12 + (-7) = -19$$

Se concluye que la nueva temperatura del refrigerador es 19 °C bajo cero.

Ten en cuenta

El signo menos tiene dos significados:

Operación → $12 - (-5)$ ← Número negativo

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe cada sustracción de números enteros como una adición equivalente y resuélvela.

a. $19 - (-12)$ b. $(-82) - 9$

c. $-6 - (-27)$ d. $18 - (-2)$

e. $(-18) - 4$ f. $(-12) - (-11)$

g. $37 - (-7)$ h. $(-19) - (-13)$

3 Efectúa las siguientes operaciones.

a. $[(-28) - (+42)] - (-13)$

b. $[(-15) - (-6)] - (-23)$

c. $[(+45) - (-4)] - (+17)$

d. $[(+27) - (-18)] - (-72)$

4 Completa la Tabla 1.

Personaje	Fecha de nacimiento	Fecha de fallecimiento	Cantidad de años vividos
Pitágoras	−571	−497	
Euclides		−275	55
Zenón	−495		65
Arquímedes	−287	−212	

Tabla 1

5 Haz lo que se indica en cada caso.

a. Resta 200 de 280 b. A −540 réstale −120

c. De 850 resta −1 070 d. Resta −2 945 de −980

Resolución de problemas

6 Un termómetro marcaba −5 °C a las 5:00 a. m. y 12 °C al mediodía. ¿Cuál fue la variación de la temperatura?

7 Si en una sustracción el minuendo es −125 y la diferencia es −125, ¿cuál es el sustraendo?

8 Karl Wilhelm, famoso matemático suizo, murió en el año de 1891, a los 74 años. ¿Cuándo nació este personaje?

9 La Tabla 2 muestra el número de goles a favor y en contra de los cuatro equipos que participaron en un campeonato de fútbol.

Equipos	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
7 A	35	38	
7 B	28	25	
7 C	52	43	
7 D	46	49	

Tabla 2

a. Completa la columna de la diferencia de goles con los números enteros correspondientes.

b. ¿Qué equipo tuvo la mayor diferencia de goles?

c. ¿Qué equipo tuvo la menor diferencia de goles?

d. ¿Qué equipo no tuvo diferencia de goles?

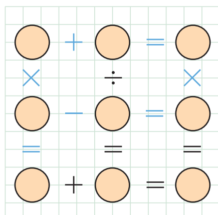
e. Ordena los equipos desde el que obtuvo el primer lugar hasta el que ocupó el último puesto.

7 Igualdades, ecuaciones e inecuaciones en Z

7.1 Igualdades

Explora

Observa el siguiente esquema.



- Escribe en cada círculo un número entre 1 y 5 (todos salvo uno se usan dos veces) de forma que se cumplan todas las igualdades.

Para solucionar el reto se utilizan igualdades.

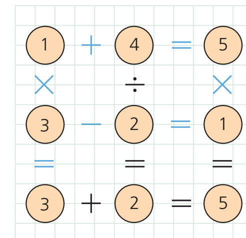
En forma horizontal se verifica que:

$$1 + 4 = 5$$
$$3 - 2 = 1$$
$$3 + 2 = 5$$

En forma vertical se tiene:

$$1 \times 3 = 3$$
$$4 \div 2 = 2$$
$$5 \times 1 = 5$$

Por tanto, el problema se resuelve de esta forma:



Una **igualdad** es una relación entre dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor. Las igualdades tienen dos miembros separados por el signo igual (=).

Una igualdad actúa como una balanza en equilibrio, como se sugiere en la Figura 1.

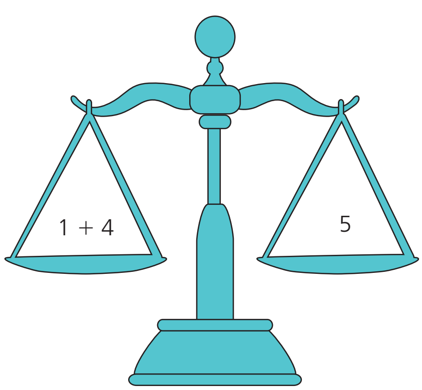


Figura 1

Ejemplo 1

Los siguientes son ejemplos de igualdades matemáticas. En todos se obtiene 16 utilizando diferentes operaciones.

$8 \times 2 = 16$ $\quad$ $5 + 5 + 6 = 16$ $\quad$ $32 \div 2 = 16$

7.2 Propiedades de las igualdades

Si a, b y c son números naturales cualesquiera, tales que $a = b$, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

- $a + c = b + c$ para todo a, b y c $\quad$ y $\quad$ $a - c = b - c$ para $a > c$ y $b > c$.
- $a \times c = b \times c$ $\quad$ y $\quad$ $a \div c = b \div c$ para $c \neq 0$ (a y b múltiplos de c).

La primera propiedad menciona que al adicionar o sustraer la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad se conserva.

La segunda propiedad indica que al multiplicar o dividir ambos miembros de una igualdad por la misma cantidad (diferente de cero), la igualdad se conserva.

Ejemplo 2

Dada la igualdad $15 + 3 = 18$, al adicionar 6 en ambos miembros de la igualdad las expresiones obtenidas siguen siendo iguales.

$$15 + 3 + \mathbf{6} = 18 + \mathbf{6}$$
$$24 = 24$$

Igualmente, al multiplicar por 2 ambos miembros de la igualdad, esta se conserva.

$$\mathbf{2} \times (15 + 3) = \mathbf{2} \times 18$$
$$2 \times 15 + 2 \times 3 = 36$$
$$30 + 6 = 36$$
$$36 = 36$$

Al restar 8 a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

$$15 + 3 = 18$$
$$15 + 3 - \mathbf{8} = 18 - \mathbf{8}$$
$$10 = 10$$

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas.

7.3 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama **incógnita** y se representa generalmente por letras minúsculas del abecedario.

La ecuación se resuelve cuando se encuentra el valor o los valores de la o las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Este valor recibe el nombre de **solución**.

Ejemplo 3

La igualdad $x + 25 = 36$ es una ecuación porque uno de sus términos es desconocido. La incógnita en este caso está representada por la letra x.

Al reemplazar la incógnita por 11 se verifica la igualdad $11 + 25 = 36$, lo que significa que $x = 11$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Para que $2 \times m + 5 = 21$, m debe reemplazarse por 8, ya que: $2 \times 8 + 5 = 21$.

Cualquier otro valor de m hace que no se conserve la igualdad.

Por ejemplo, si $m = 1$, se tiene que $2 \times 1 + 5$ no es igual a 21.

Ten en cuenta

Es posible combinar ecuaciones aditivas y multiplicativas.

Esas ecuaciones generalmente tienen la forma $a \times x + b = c$.

7.4 Ecuaciones aditivas y multiplicativas

Existen dos tipos de ecuaciones: aditivas y multiplicativas.

- Las ecuaciones aditivas tienen alguna de las formas:
  $a + x = b$ $x - a = b$ $a - x = b$
- Las ecuaciones multiplicativas tienen alguna de las formas:
  $a \times x = b$ $x \div a = b$ $a \div x = b$

Ejemplo 5

La ecuación $x + 15 = 30$ es aditiva, mientras que la ecuación $3 \times y = 21$ es una ecuación multiplicativa.

Ejemplo 6

Para solucionar la ecuación $x + 15 = 30$, se resta 15 en ambos miembros de la igualdad. El resultado es: $x = 15$.

Ejemplo 7

Para solucionar la ecuación $3 \times y = 21$, se divide por 3 en ambos miembros de la igualdad y se obtiene $y = 7$.

Ejemplo 8

A continuación se muestra la solución de algunas ecuaciones.

a. $38 - m = 25$

$38 - m + m = 25 + m$

$38 + 0 = 25 + m$

$38 - 25 = 25 + m - 25$

$38 - 25 = m + 0$

$13 = m$

b. $3 \times b + 7 = 28$

$b \times 3 + 7 - 7 = 28 - 7$

$(b \times 3) \div 3 = 21 \div 3$

$b = 7$

Cálculo mental

Deshacer operaciones

Si quieres resolver ecuaciones combinadas de la forma $a \times x + b = c$, puedes usar el cálculo mental para "deshacer" las operaciones: primero restas b a ambos lados para deshacer la suma y luego, divides el resultado del lado derecho entre a para deshacer la multiplicación.

- Usa tu cálculo para resolver la ecuación $5 \times x + 8 = 43$.

7 Igualdades, ecuaciones e inecuaciones en Z

7.5 Inecuaciones

Una **desigualdad** es una expresión que compara dos cantidades que no son iguales. Así como la igualdad se representa mediante una balanza en equilibrio, una desigualdad se representa como una balanza inclinada hacia alguno de los lados.

Una desigualdad que contiene al menos una variable se denomina **inecuación**.

Ejemplo 9

Expresiones como $4 > 3$; $6 < 10$, y $6 + 9 > 8$ son desigualdades, mientras que otras como $x + 7 > 12$; $7 < z$; y $5 + m > 13$ son inecuaciones.

Las **soluciones de una inecuación** son los valores que puede tomar la incógnita, de manera que al sustituirlos en la inecuación hacen que la desigualdad sea cierta.

Ejemplo 10

La inecuación $x + 7 > 12$ es cierta para todos los valores mayores que 5. Si se toma $x = 6$ por ejemplo, se tiene que $6 + 7 > 12$; pero si se toma un valor menor que 5, como por ejemplo 4, la desigualdad es falsa porque $4 + 7 < 12$.

La solución de esta inecuación se puede representar sobre una semirrecta numérica repasando con un color todos los valores mayores que 5, como se muestra en la Figura 2.

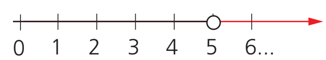


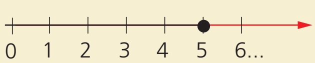
Figura 2

El círculo blanco sobre el 5 indica que este número no está incluido dentro de la solución.

Ten en cuenta

Otros símbolos que aparecen en las inecuaciones son $\geqslant$ y $\leqslant$, que se leen "mayor o igual" y "menor o igual", respectivamente.

Cuando aparecen estos símbolos, el valor extremo hace parte de la solución. Así, la inecuación $x + 7 \geqslant 12$ es válida para 5 y todos los valores mayores que 5, y su solución se representa de la siguiente manera:



El círculo negro indica que 5 hace parte de la solución.

Para resolver una inecuación se deben tener en cuenta un par de reglas básicas:

Regla de la suma. Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, se obtiene una inecuación equivalente.

Regla del producto. Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o se dividen por un mismo número natural, se obtiene otra inecuación equivalente.

Ejemplo 11

Para solucionar la inecuación $5 + m > 13$, se resta 5 a lado y lado de esta, de manera que: $5 + m - 5 > 13 - 5$, de donde $m > 8$.

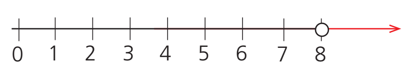


Figura 3

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve la inecuación $4 \times m + 5 \geqslant 13$.

Solución:

Primero se resta 5 a lado y lado de la inecuación.

$$4 \times m + 5 - \mathbf{5} \geqslant 13 - \mathbf{5}$$
$$4 \times m \geqslant 8$$

Ahora, se divide al lado derecho e izquierdo por 4.

$$4 \times m \div 4 \geqslant 8 \div 4$$
$$m \geqslant 2$$

La representación gráfica de la solución se muestra en la Figura 4.



Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z de manera analítica en la solución de ejercicios numéricos y problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina si cada igualdad es correcta.

a. $45 + 27 = 31 + 36$

b. $(3 \times 12) = (72 \div 2)$

c. $4^3 = 8^2$

d. $(64 - 26 + 12) = 3^3$

e. $(256 \div 16) + 14 = 30 \times 10$

f. $34 + 28 - 19 - 20 + 18 = 32$

3 Resuelve cada ecuación y verifica su solución.

a. $23 + x = 52$

b. $3 \times n = 51$

c. $8 + y - 12 = 1$

d. $5 \times p = 30$

e. $50 = t - 1$

f. $64 \div 8 + u = 30$

g. $r = 24 - 12 \div 4$

h. $56 \div 8 - 7 = j$

i. $543 + 762 + h = 2\,653$

j. $144 \div s = 12$

Comunicación

4 Resuelve cada inecuación y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

a. $x > 7$

b. $y + 8 > 11$

c. $n - 12 > 20$

d. $u + 8 \geqslant 16$

e. $p + 5 \leqslant 10$

f. $f + 12 > 21$

g. $4 \times r + 5 \leqslant 9$

h. $7 \times g - 4 > 10$

Modelación

5 Escribe una ecuación que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

a. Su solución es $t = 14$.

b. Su solución es $y = 24$.

c. Es aditiva y su solución es 9.

d. Su solución es $f = 14$ y su lado izquierdo es $5 \times f$.

e. Su solución es $h = 13$ y el término de la derecha es $h - 12$.

Comunicación

6 Escribe dos inecuaciones cuya solución sea la que se representa en cada semirrecta numérica de la figura 5 a la figura 8.

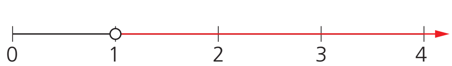
a. 

Figura 5

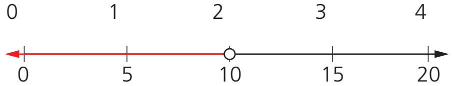
b. 

Figura 6

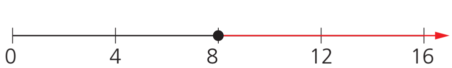
c. 

Figura 7

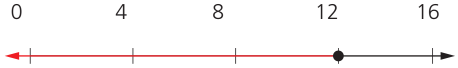
d. 

Figura 8

Razonamiento

7 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. Todas las igualdades son ecuaciones.

b. Todas las inecuaciones son desigualdades.

c. Todas las inecuaciones tienen infinitas soluciones.

d. Todas las ecuaciones tienen solución.

e. Las ecuaciones equivalentes tienen la misma solución.

f. La solución de $t + 10 = 10$ es $t = 1$.

g. La solución de la ecuación $h \div 3 = 17$ es $h = 51$.

h. Las ecuaciones $g + 4 = 5$ y $g - 2 = 1$ tienen la misma solución.

Comunicación

8 Plantea una ecuación o una inecuación, según corresponda en cada caso, resuélvela y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

a. La diferencia entre un número y 8 es 10.

b. El doble de un número es mayor que 18.

c. Un número sumado a 4 es igual a 11.

d. El producto de 9 con cierto número es al menos 18.

e. La diferencia entre un número y 12 es máximo 10.

f. El cociente de un número y 8 es mínimo 2.

Razonamiento

9 Lee y soluciona.

Mauricio Andrés interpretó el enunciado "cinco veces un número más dos es igual a 17" mediante la ecuación $5 \times (p + 2) = 17$. Por su parte, Adriana lo interpretó mediante la expresión $5 \times p + 2 = 17$.

a. ¿Cuál de ellos hizo la interpretación correcta?

b. ¿Cuál es la solución de la ecuación?

10 Resuelve.

¿En qué es diferente el gráfico de $y + 5 < 12$ con respecto al gráfico de $y + 5 \leqslant 12$?

Resolución de problemas

11 Luis quiere correr por lo menos 20 kilómetros cada semana. Representa gráficamente su recorrido semanal.

12 En una calle de la ciudad se permite manejar a 35 kilómetros por hora o menos. Usa la variable s para representar la velocidad en kilómetros por hora. Luego, escribe una inecuación que describa las velocidades permitidas. Finalmente, representa la solución de la inecuación.

8 Problemas con ecuaciones e inecuaciones

Explora

El área de este rectángulo es máximo de 30 cm^2.

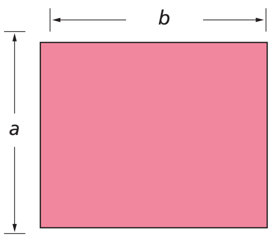


Figura 1

- ¿Cuál expresión permite interpretar dicho enunciado?

Como el área A de un rectángulo es el producto de su base por su altura, se tiene que: $A = a \times b$.

Por otra parte, que esta área sea máximo de 30 cm^2 indica que es 30 cm^2 o menos, así que la expresión buscada es la inecuación $a \times b \leqslant 30$.

El **lenguaje matemático** se utiliza para plantear y resolver problemas matemáticos a partir de expresiones cotidianas.

En la solución de cualquier problema que involucre el planteamiento de ecuaciones o inecuaciones se sugiere seguir estos pasos:

Paso 1. Leer y comprender el enunciado.

Paso 2. Designar la incógnita.

Paso 3. Plantear la ecuación o la inecuación.

Paso 4. Resolver la ecuación o la inecuación.

Paso 5. Verificar la solución.

Paso 6. Contestar.

Ejemplo 1

Marcos sacó del galpón entre el lunes y el jueves 78, 72, 87 y 90 huevos, respectivamente. ¿Cuántos huevos debe sacar el viernes para completar por lo menos 400?

Paso 1: ¿Qué debes encontrar?

Un número mínimo de huevos para completar como mínimo 400.

Paso 2: Asigna una variable a la cantidad de huevos buscada.

Llámala p.



Paso 3: Plantea una inecuación.

De acuerdo con el enunciado,

$78 + 72 + 87 + 90 + p \geqslant 400$.

Paso 4: Resuelve la inecuación.

$327 + p \geqslant 400$ y obtienes $p \geqslant 73$.

Paso 5: Comprueba la solución.

Se verifica que a partir de $p = 73$ se cumple que: $78 + 72 + 87 + 90 + p \geqslant 400$.

Paso 6: Contesta la pregunta.

Marcos debe sacar del galpón al menos 73 huevos el viernes.

Ten en cuenta

Ya en el siglo XVI a. de C. los egipcios resolvían problemas cotidianos con la ayuda de ecuaciones que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Julio y Manuel juegan en el mismo equipo de fútbol. El sábado pasado Julio marcó 3 goles más que Manuel, pero entre ambos marcaron menos de 9 goles. ¿Cuántos goles pudo haber marcado Manuel?

Solución:

Si j es el número de goles que marcó Julio y m es el número de goles que marcó Manuel, entonces $j + m < 9$.

Pero, además, $j = m + 3$; por tanto, $m + 3 + m < 9$, de donde: $2 \times m + 3 < 9$. Al resolver la inecuación se obtiene $m < 3$. Por consiguiente, Manuel pudo haber marcado 0, 1 o 2 goles.



Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Relaciona las expresiones de la columna de la izquierda con sus correspondientes interpretaciones en el lenguaje matemático de la columna de la derecha.

El doble de un número.	m^3
El triple de un número.	$\frac{1}{3} \times m$
El cuádruplo de un número.	$\frac{1}{2} \times m$
La mitad de un número.	$\frac{m}{4}$
Un tercio de un número.	$2 \times m$
Un cuarto de un número.	m^2
Un número al cuadrado.	$3 \times m$
Un número al cubo.	$4 \times m$

3 Determina si la ecuación dada interpreta cada enunciado. Si es así, resuélvela.

a. Cuando dupliqué mi dinero d quedé con \$ 400.
Ecuación: $2 \times d = 400$

b. La tercera parte de la edad de Juan, que es t, es 57.
Ecuación: $t \times 3 = 57$

c. Si al número natural que le sigue a g se le suma 34 se obtiene 45.
Ecuación: $g + 1 + 34 = 45$

d. La diferencia de un número k y 45 es 78.
Ecuación: $k - 45 = 78$

Resolución de problemas

4 Viviana compró algunas cajas de donas. Hay 16 donas en cada caja, y ella compró 80 donas en total. Escribe una ecuación que le permita saber a Viviana cuántas cajas de donas compró.

5 En cierto tiempo, Jaime condujo el doble de distancia que Helena. Si entre los dos condujeron 90 kilómetros, encuentra la distancia que condujo cada uno.

6 El largo de un rectángulo es de 15 cm y su perímetro es 50 cm. Encuentra el ancho del rectángulo.

7 El perímetro de un lote triangular mide 72 metros. Un lado mide 16 metros y el otro mide el doble que el primero. Encuentra la longitud del tercer lado.

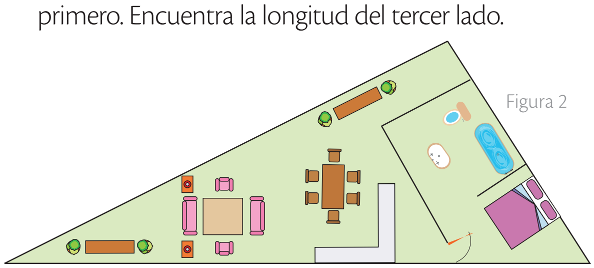


Figura 2

8 ¿Qué edad tiene Amanda si su hijo tiene 12 años y ella le lleva 24 años?

9 ¿Qué edad tiene Camilo si se sabe que dentro de 12 años tendrá 64 años?

10 Andrés tiene tres juguetes más que Santiago. Si Santiago tiene 16 juguetes, ¿cuántos juguetes tienen entre los dos?



11 ¿Qué número tiene que multiplicarse por 17, y al producto sumarle 34, para obtener 68?

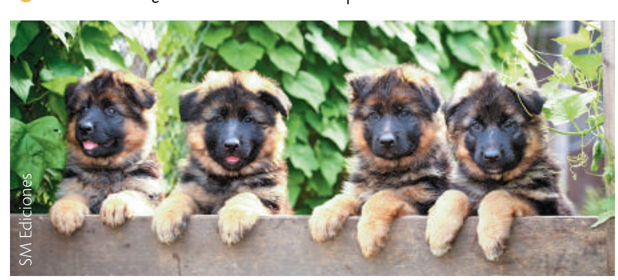
12 Si un rollo de cinta cuesta \$ 11, ¿cuántos rollos puede comprar Sonia con al menos \$ 55?

13 ¿Cuántas camisas puede comprar Rolando con al menos \$ 125 si cada una cuesta \$ 25?

14 Jessica necesita un promedio de 85 puntos durante todo el bachillerato para optar por una beca. Durante los primeros cinco años de bachillerato sus promedios fueron 87, 81, 85, 90 y 78. ¿Cuál es la nota mínima que debe obtener Jessica para ganar la beca? PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

15 Si a cinco veces un número se le incrementa en cuatro, el resultado es al menos 19. Encuentra el menor valor que satisface esas condiciones.

16 De ocho cachorritos de perros hay más hembras que machos. ¿Cuántas hembras puede haber?



17 Un camión pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del camión vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajas iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada una de ellas para poder llevarlas en el camión?

18 En una caja hay tornillos defectuosos y no defectuosos. Si se sabe que en total hay 200 tornillos y que el doble de defectuosos es menor que el número de no defectuosos, ¿cuántos tornillos defectuosos puede tener la caja?

9 Ecuaciones con estructura aditiva

Explora

Violeta tiene una deuda con el banco.


SM Ediciones

- Si hace un abono de \$ 750 y aún debe \$ 800, ¿cuál era su deuda inicial con el banco?

La situación se puede representar mediante la siguiente **ecuación**:

Deuda inicial		Abono		Deuda actual
x	$+$	750	$=$	-800

Para resolver esta ecuación, se utilizan las propiedades de la adición y de las igualdades como se muestra a continuación.

Se suma el opuesto de 750 en ambos lados de la igualdad.

$$x + 750 + (-750) = -800 + (-750)$$

Se obtiene 0 como sumando en el lado izquierdo (Propiedad invertiva).

$$x + 0 = -1550$$

Se despeja x en el lado izquierdo de la igualdad (Propiedad modulativa).

$$x = -1550$$

Según lo anterior, la deuda inicial de Violeta era de \$ 1 550.

Una **ecuación de estructura aditiva** se caracteriza porque su operación principal es una adición o una sustracción. Estas ecuaciones son de la forma:

$$x + a = b \quad \text{o} \quad x - a = b$$

La letra x es la **incógnita** de la ecuación.

Ten en cuenta

La propiedad uniforme (de las igualdades) establece que si en ambos miembros de una igualdad se suma un mismo número, la igualdad se mantiene.

Ejemplo 1

Las siguientes ecuaciones tienen estructura aditiva. Observa cómo se resuelven.

- $3 + m = -12$

$3 + (-3) + m = -12 + (-3)$ ← Se suma el opuesto de 3 en ambos lados de la igualdad.

$0 + m = -15$ ← Se aplica la propiedad invertiva de la adición.

$m = -15$ ← Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene el valor de la incógnita.

- $n - 18 = -23$

$n + (-18) + 18 = -23 + 18$ ← Se suma el opuesto de -18 en ambos lados de la igualdad.

$n + 0 = -5$ ← Se aplica la propiedad invertiva de la adición.

$n = -5$ ← Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene el valor de la incógnita.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Al sustraer 14 de cierto número, se obtiene 9. ¿Cuál es ese número?

Solución:

Si se denomina a al número buscado, entonces la ecuación que modela la situación es $a - 14 = 9$. Así, al resolver la ecuación se obtiene:

$$a + (-14) = 9$$
$$a + (-14) + 14 = 9 + 14$$
$$a + 0 = 9 + 14$$
$$a = 23$$

El número es 23.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $40 + x = -15$

b. $27 + 40 + 16 = 83$

c. $p - 89 = 46$

d. $\{[3 + 2 - (9 - 7) + (3 + 4)]\}$

e. $m + 25 + 32 = -91$

f. $32 - 51 - 36 = -55$

g. $y - 3 = -7$

Comunicación

3 Relaciona cada ecuación con su solución.

a. $5 + x = 0$	( ) 25
b. $-17 + x = 0$	( ) 27
c. $30 + x = 0$	( ) −5
d. $x + (-27) = 0$	( ) 30
e. $x + 35 = 0$	( ) 17
f. $-25 + x = 0$	( ) −35
g. $x + (-30) = 0$	( ) −30

4 Resuelve las ecuaciones aplicando las propiedades de la adición de números enteros.

a. $x - 3 = 25$ b. $x + 9 = -234$

c. $-9 = -x + 12$ d. $-15 = x - 8$

e. $x - 23 = -78$ f. $x + 6 = -22$

g. $19 = x - 6$ h. $-14 - x = 20$

i. $x - 5 = -9$ j. $1 - 8 = 623 + x$

k. $-2 = x - 723$ l. $-9 = x - 25$

Modelación

5 Traduce cada enunciado en una ecuación y resuélvela.

a. 17 menos un número es 79.

b. Un número disminuido en 23 es igual a 40.

c. Si a 21 se le suma cierto número, se obtiene 103.

d. La edad de una persona dentro de 7 años será 45.

e. La temperatura actual aumentada en 9 grados da una lectura de 38 grados.

f. Si a un número se le suma −9, se obtiene 24.

g. 32 disminuido en cierto número es igual a −89.

Comunicación

6 Escribe un problema que se pueda modelar con cada ecuación y resuélvelo.

a. $x - 6 = -19$ b. $7 = x + (-5)$

c. $-8 + x = 32$ d. $17 + x = 24$

7 Indica el error que se cometió al resolver la ecuación. Luego, corrígelo.

$$60 - 37 = 84 + x$$
$$22 = 84 + x$$
$$22 + (-84) = 84 + (-84) + x$$
$$-62 = 0 + x$$
$$-62 = x$$

Resolución de problemas

8 Cierto número más 8 es igual a 24. ¿Cuál es el número?

9 La suma de las edades de dos hermanos es 32. Si el menor tiene 15 años, ¿cuántos años tiene el mayor?

10 Dos niños reúnen nueve libros. Si uno de ellos aporta cuatro libros, ¿cuántos libros aporta el otro?

11 La suma de dos números enteros es 340. Si uno de los sumandos es −130, ¿cuál es el otro sumando?

12 La suma de dos números es 85. Si el mayor es 49, ¿cuál es el menor?

13 ¿Qué número se le debe adicionar a −32 para obtener −8 en el resultado?

14 La edad de un padre sumada con la edad de su hijo es igual a 61 años. Si el hijo tiene 15 años, ¿cuál es la edad del padre?

15 Con el dinero que tengo y $ 24 700 más, podría pagar una deuda de $ 52 500 y me sobrarían $ 3 700. ¿Cuánto dinero tengo?

16 Las edades de Javier y Juanita suman 37 años. Si Javier tiene 15 años, ¿cuántos años tiene Juanita?

17 ¿Cuántos pisos faltan para subir al piso 42, si te encuentras en el 17?

Practica Más

Números relativos

Ejercitación

1. Representa con números relativos las temperaturas promedio de una ciudad registradas en la Tabla 1 tomando como punto de referencia las temperaturas que se indican en cada literal.

L	Ma	Mi	J	V	S	D
8 °C	10 °C	13 °C	11 °C	18 °C	17 °C	22 °C

Tabla 1

a. 12 °C b.15 °C

Resolución de problemas

2. En el golf un *par* indica el número de golpes que un golfista debe requerir para meter la bola en un hoyo. En la Tabla 2 se registra la cantidad de golpes que realizan varios golfistas al enfrentarse al hoyo 5.

Golfista	Golpes
Luis	2
Juan	6
Ana	7
Jaime	1
Víctor	4
Luz	9

Tabla 2


SM Ediciones

Utiliza números relativos para representar cuántos golpes menos o cuántos golpes más dio cada golfista a la pelota si el hoyo es *par* cuatro.

Números enteros

Comunicación

3. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros. ( )

b. El -6 es un número natural. ( )

c. El opuesto de un entero positivo es negativo. ( )

d. El 0 es un número entero positivo. ( )

Ejercitación

4. Representa en la recta numérica el opuesto de cada grupo de números.

a. $-6, 9, -1, 0, 8$



Figura 1

b. $-3, -2, 7, -11, 10$



Figura 2

Valor absoluto. Orden en los números enteros

Razonamiento

5. Lee cada afirmación y escribe un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

a. El valor absoluto de un número entero positivo es un número entero negativo.

b. Entre dos números negativos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

c. El opuesto de un número negativo siempre es menor que el número dado.

d. Dos números enteros opuestos tienen diferente signo.

e. Todo número negativo es menor que 0.

Comunicación

6. Determina y escribe los números por los que se puede reemplazar cada letra para que los grupos de números queden ordenados.

a. $-15, A, -10, B, 0, C, 3$

b. $6, |A|, 0, B, -8, C$

c. $-|A|, -6, 0, 2, |B|, 5$

d. $-13, -|A|, -8, -|B|, 0, C, 2$

Adición y sustracción de números enteros

Ejercitación

7. Calcula el resultado de cada operación.

a. $-5 + 6 - (-6) + 7 - (-8)$

b. $9 + (-6) + (-6) - (-5)$

c. $8 + 2 + (-10) - (-9)$

d. $(-12) + (-15) - 8 + (-8)$

Ecuaciones

Resolución de problemas

8. La suma de dos números es 3 650. Si uno de los sumandos es 2 145, selecciona dentro de los siguientes el otro sumando.

a. 1 505 b. 1 205 c. 1 405 d. 1 705

9. A un número se le resta 128 y a su diferencia se le suma 546. Al final, se obtiene 2 304 como resultado. Elige el número inicial.

a. 1 786 b. 1 886 c. 1 986 d. 2 016

10. Una taza de azúcar pesa 1 763 g. Si la taza vacía pesa 459 g, ¿cuánto pesa el azúcar?

Resolución de Problemas

Estrategia: Utilizar la información de una tabla

Problema

Una ciudad ha experimentado temperaturas extremas como las que se registran en la Tabla 1.

Año	Mínima	Máxima
2011	−2 °C	18 °C
2012	−5 °C	19 °C
2013	−4 °C	22 °C
2014	−7 °C	21 °C
2015	−3 °C	23 °C

Tabla 1

¿En qué año la ciudad experimentó la mayor variación en la temperatura?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información se puede obtener de la tabla?

R: Las temperaturas máximas y mínimas que ha experimentado la ciudad desde el 2011 al 2015.

- ¿Qué se debe averiguar?

R: El año en el que se presentó la mayor variación de la temperatura en la ciudad.

2. Crea un plan

- Analiza la información de la tabla y calcula la diferencia entre los números enteros correspondientes a la temperatura máxima y mínima de cada año.

3. Ejecuta el plan

- Calcula la variación de la temperatura en cada año.

Año	Variación
2011	$18 - (-2) = 18 + 2 = 20$ °C
2012	$19 - (-5) = 19 + 5 = 24$ °C
2013	$22 - (-4) = 22 + 4 = 26$ °C
2014	$21 - (-7) = 21 + 7 = 28$ °C
2015	$23 - (-3) = 23 + 3 = 26$ °C

Tabla 2

R: La mayor variación de temperatura fue de 28 °C y se presentó en el 2014.

4. Comprueba la respuesta

- Compara las variaciones de temperatura de los 5 años y verifica que 28 °C > 20 °C , 28 °C > 24 °C y 28 °C > 26 °C.

Aplica la estrategia

1. La Tabla 3 registra los movimientos de la cuenta bancaria de Patricia en una semana.

Día	Consignación	Retiro
lunes	$ 320	$ 180
martes	$ 240	$ 570
miércoles	$ 640	$ 450
jueves	$ 120	$ 120
viernes	$ 210	$ 230

Tabla 3

¿Cuál es el saldo de Patricia al finalizar la semana?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. El monte Pissis tiene 6 793 m de altura, ¿cuántos metros más o cuántos metros menos de altura tienen los montes de la Tabla 4 con respecto al monte Pissis?

Monte	Aconcagua	Huascarán
Altura (m)	6 962	6 768

Tabla 4

3. Ordena de menor a mayor los puntos de fusión de los elementos químicos registrados en la Tabla 5.

Elemento	Nitrógeno	Helio	Bromo	Fósforo	Neón
Punto de fusión (°C)	−219	−270	−7	44	−249

Tabla 5

Formula problemas

4. Plantea y resuelve un problema que se solucione empleando la ecuación:

$$x - 34 = -25$$

10 Multiplicación de números enteros

Explora

Desde las 8:00 a. m., a un tanque vacío se le vierten 28 L de agua cada hora y se le extraen simultáneamente 5 L.



- ¿Cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m.?

Una manera de averiguar cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m., consiste en hacer el cálculo de los litros que se vertieron durante las tres horas y, a esta cantidad, restarle la cantidad de litros que se extrajeron en ese mismo tiempo.

- Al representar en la recta numérica la cantidad de litros de agua que se vierten en el tanque, se obtiene la Figura 1.

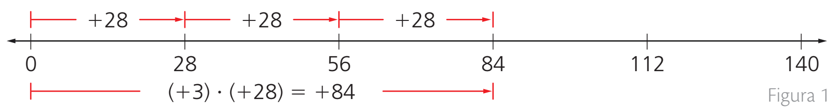


Figura 1

Según lo anterior, después de 3 horas se habrán depositado 84 L de agua en el tanque.

- Por otra parte, el número de litros que se extraen del tanque puede representarse como en la Figura 2.

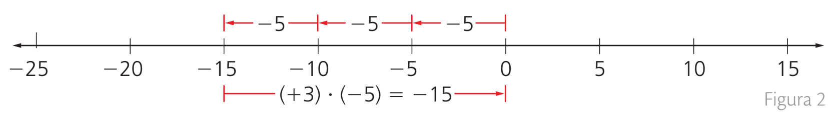


Figura 2

Entonces, al cabo de tres horas habrán salido del tanque 15 L de agua.

- Finalmente, para calcular la cantidad de litros que habrá en el tanque a las 11:00 a.m. se realiza la resta.

$$84\text{ L} - 15\text{ L} = 69\text{ L}$$

Para calcular el **producto de dos números enteros**, se multiplican los valores absolutos de los factores. El producto es **positivo** si los factores tienen el mismo signo, o es **negativo** si los factores tienen diferente signo.

Ten en cuenta

El signo de la multiplicación (×) se puede reemplazar por el punto (·) para evitar confusiones con otros signos matemáticos. Por ejemplo,

$$7 \times 8$$

es equivalente a

$$7 \cdot 8$$

10.1 Regla de los signos

Se puede determinar el signo del producto de dos números enteros si se aplica la regla de los signos, que se resume como sigue.

- El producto de dos números enteros de igual signo es positivo.

$$(+) \cdot (+) = +$$
$$(-) \cdot (-) = +$$

- El producto de dos números enteros de diferente signo es negativo.

$$(+) \cdot (-) = -$$
$$(-) \cdot (+) = -$$

Ejemplo 1

Multiplicar $3 \cdot (-4)$ significa moverse hacia la izquierda en la recta numérica y hacer tres saltos, avanzando 4 unidades en cada uno (Figura 3).

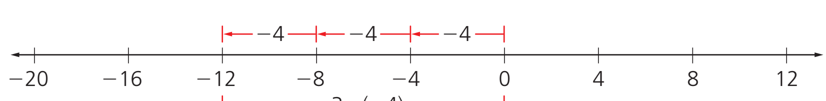


Figura 3

Así, $3 \cdot (-4) = -12$. Se verifica que, como los factores son de diferente signo, el resultado sea negativo.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Ejemplo 2

Observa el resultado de estas multiplicaciones.

- $7 \cdot (-8) = -56$
- $(-6) \cdot 9 = -54$
- $(-12) \cdot (-3) = +36$
- $11 \cdot 4 = 44$

10.2 Propiedades de la multiplicación de números enteros

En el conjunto de los números enteros, la multiplicación cumple ciertas propiedades. En la Tabla 1 se describe cada una de ellas.

Propiedad	Definición	Ejemplo
Clausurativa	La multiplicación de dos o más números enteros es otro número entero. En general: $a \cdot b = c, c \in \mathbb{Z}$	$(-2) \cdot (-9) = 18$
Conmutativa	En toda multiplicación de números enteros, el orden de los factores no altera el producto. En general: $a \cdot b = b \cdot a$	$(-5) \cdot 4 = 4 \cdot (-5)$ $-20 = -20$
Asociativa	Se pueden asociar los factores de distintas formas y el producto no se altera. En general: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$[(-3) \cdot 4] \cdot (-7)$ $= (-12) \cdot (-7)$ $= 84$ $(-3) \cdot [4 \cdot (-7)]$ $= (-3) \cdot (-28)$ $= 84$
Elemento neutro	El elemento neutro de la multiplicación es 1, pues el producto de un número entero por 1 es el mismo número. En general: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$1 \cdot (-15) = (-15) \cdot 1$ $= -15$
Elemento nulo	El producto de un número entero con 0 es 0. En general: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$(-5) \cdot 0 = 0$
Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. En general: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (-15 + 3)$ $= 2 \cdot (-12) = -24$ $2 \cdot (-15) + 2 \cdot 3$ $= (-30) + 6$ $= -24$

Tabla 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Karina tiene ahorrados \$ 2 752, pero debe \$ 345 a cada uno de sus cinco amigos. Indica, con un número entero, el saldo del que dispone Karina.

Solución:

- Primero se toma la cantidad de dinero que debe Karina y se multiplica por 5, que son los amigos a los que les adeuda.

$$(-345) \cdot 5 = -1725$$

- Luego, de los ahorros se resta la deuda.

$$2\,752 - 1\,725 = 1\,027$$

Por lo tanto, Karina dispone de un saldo de +\$ 1 027.

Cálculo mental

Multiplicar por números cercanos a las potencias de 10

Para multiplicar por 9, 11, 99, 101..., es decir, por una potencia de 10 menos 1 (o más 1), se descompone en sumas o restas de manera conveniente.

Por ejemplo:

$$28 \cdot 99 = 28 \cdot (100 - 1)$$
$$= 2\,800 - 28 = 2\,772$$

- Realiza las multiplicaciones.

a. $37 \cdot 9$

b. $-23 \cdot 101$

c. $57 \cdot 11$

CULTURA del Buen Vivir

El servicio

Servir y mostrar solidaridad a los compañeros y compañeras es fundamental para trabajar en equipo.

- ¿Por qué consideras necesario tener una actitud servicial al trabajar en equipo?

10 Multiplicación de números enteros

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula estos productos.

a. $(-8)\cdot(-4)$ b. $(-31)\cdot(-4)$
c. $(-13)\cdot(-42)$ d. $(-23)\cdot(-6)$
e. $42\cdot(-7)$ f. $(-18)\cdot(-35)$
g. $34\cdot(-2)$ h. $(-56)\cdot(-36)$
i. $(-5)\cdot 19$ j. $(-4)\cdot 9$
k. $(-3)\cdot 24$ l. $(-7)\cdot 6$

3 Halla el número que falta para obtener el resultado que se muestra en cada caso.

a. $7\cdot\square = 35$ b. $(-3)\cdot\square = -24$
c. $9\cdot\square = -540$ d. $\square\cdot(-15) = 0$
e. $\square\cdot 25 = -100$ f. $\square\cdot 200 = -400$
g. $12\cdot\square = 12$ h. $(-17)\cdot\square = -51$
i. $9\cdot\square = -72$ j. $\square\cdot(-35) = 140$

Comunicación

4 Completa la Tabla 2.

Número	−12	−6	−13	21	−32	4
Doble						
Triple						
Cuádruple						

Tabla 2

5 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El producto de dos números enteros es otro número entero. ( )
b. El producto de dos números enteros negativos es un número entero negativo. ( )
c. El número 0 es el elemento neutro de la multiplicación de los números enteros. ( )
d. La multiplicación de números enteros no cumple la propiedad conmutativa. ( )

Razonamiento

6 Escribe como producto de dos factores los siguientes resultados (puede haber más de una solución).

a. −14 b. 300
c. 6 d. 84
e. −25 f. −90
g. −75 h. 105
i. 88 j. −49

7 Resuelve y completa la Tabla 3.

a	*b*	*c*	$a\cdot b\cdot c$	$a\cdot c\cdot(-1)$
−7	−31	9		
−9	20	−2		
5	−13	0		
−12	8	−8		
16	14	−11		

Tabla 3

Comunicación

8 Escribe la multiplicación que se representó en cada caso.

a.

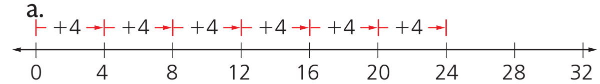


Figura 4

b.

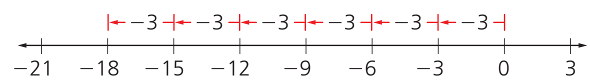


Figura 5

Razonamiento

9 Resuelve.

a. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
b. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
c. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
d. ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar (-2) por sí mismo 981 veces?
e. ¿Cuál es el signo del siguiente producto? $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\ldots\cdot(-1056)$

10 Reemplaza en las operaciones las letras por sus valores correspondientes. Luego, calcula los resultados.

$m = -2 \quad n = 5 \quad p = -7 \quad q = -10$

a. $(m\cdot q)\cdot(n\cdot p)$ b. $m\cdot(n+p)$
c. $(m+p)\cdot(n-q)$ d. $(2m)\cdot p\cdot(2n)\cdot q$
e. $2p\cdot(q+p)$ f. $(m-q)\cdot p$

11 Lee cada situación y justifícala dando un ejemplo.

a. Si multiplicas dos números enteros que no tienen el mismo signo, ¿qué resultado obtendrás?
b. Si multiplicas dos números enteros negativos, ¿qué resultado obtendrás?
c. Si multiplicas dos números enteros, ambos positivos, ¿el resultado será un número entero positivo o un número entero negativo?

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

12 Completa las casillas de cada cuadrado con números enteros, de forma que el producto por filas y columnas sea el mismo.

a.

		−2
	10	25
		−20

b.

−5		3
	−3	
		2

13 Busca el camino más corto desde el punto *A* hasta el punto *B*, de tal manera que cada número sea el doble del anterior. El camino puede ser de manera vertical, horizontal o diagonal.

A	−12	16	35	77	21
−7	24	46	24	12	25
−14	−28	43	56	112	45
28	−56	−112	12	−89	90
56	−21	−224	−448	−1216	457
30	−64	448	−896	−1792	2516
60	128	−235	−1624	−3584	*B*

14 Resuelve. Si p y q son números enteros, encuentra las posibles soluciones para cada ecuación.

a. $p \cdot q = -45$ b. $p \cdot q = -448$

c. $p \cdot q = -32$ d. $p \cdot q = 54$

e. $p \cdot q = 86$ f. $p \cdot q = -96$

15 Encuentra y corrige el error en las siguientes multiplicaciones de enteros.

a. $[(-1) \cdot 4 \cdot (-17)] \cdot (8 \cdot 5)$
$= (-68) \cdot 40$
$= -2720$

b. $[(-5) \cdot 4 \cdot (-7) \cdot (-8)] \cdot (-3)$
$= 1120 \cdot (-3)$
$= 3360$

16 Completa las pirámides de las figuras 6 y 7, teniendo en cuenta que la casilla superior es el resultado de la multiplicación de las dos casillas inferiores.

a.

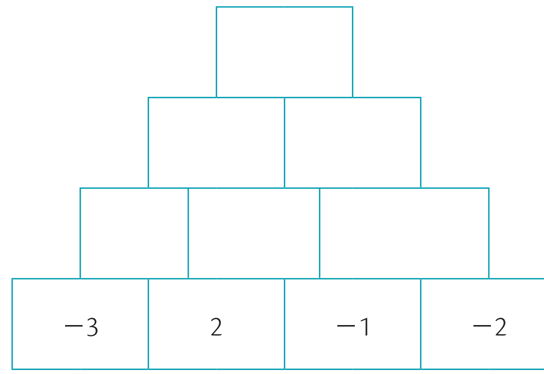


Figura 6

b.

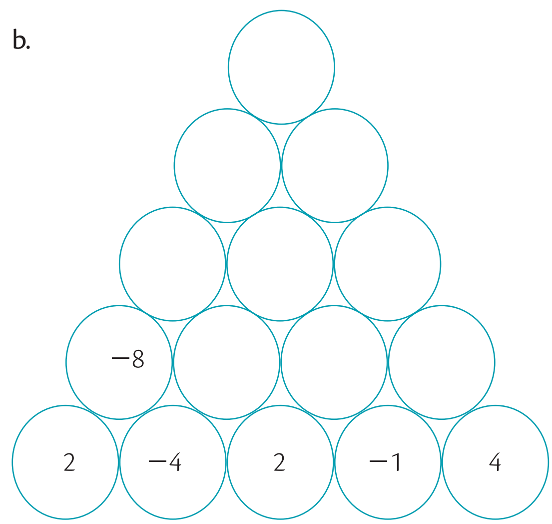


Figura 7

Resolución de problemas

17 ¿Cuál es el resultado de la multiplicación entre la suma de (−7) y (−6) y la resta entre (−4) y (−4)?

18 Si el producto de dos números es −48 y la diferencia entre el entero mayor y el entero menor es 16, ¿cuáles son los dos números?

19 En la tienda de don Juan hay una nueva nevera. Si la temperatura desciende 4 °C cada hora una vez conectada la máquina, y la temperatura actual es de 16 °C, ¿cuál será la temperatura dentro de ocho horas?

20 Al triplicar la temperatura registrada en un día muy caluroso se obtiene 69 °C. ¿Cuál era la temperatura inicial?

21 Una piscina se llena a razón de 250 L por hora. ¿Cuántos litros de agua tiene la piscina después de 7 horas?

11 División exacta de números enteros

Explora

En cierto experimento científico se debe disminuir la temperatura de una sustancia a razón de 13 °C cada hora.


SM Ediciones

- Si el experimento da inicio con una temperatura de 0 °C, ¿cuántas horas habrán transcurrido cuando la temperatura alcanza los 78 °C bajo cero?

Para resolver la situación, se puede dividir la temperatura final entre la cantidad de grados Celsius en los que disminuye la temperatura cada hora.

$$(-78) \div (-13)$$

En este caso, se debe dividir una cantidad negativa entre otra cantidad negativa. Para ello, se efectúa la división del valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor, y al cociente se le pone signo positivo.

$$(-78) \div (-13) = +6$$

Este resultado significa que habrán transcurrido 6 horas desde el inicio del experimento hasta alcanzar la temperatura final.

Para calcular el **cociente de dos números enteros**, se divide el valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor. El cociente es **positivo** si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y es **negativo** si dichos términos tienen diferente signo.

La regla de los signos tiene una versión correspondiente en la división exacta de números enteros:

- El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.

$$(+) \div (+) = +$$
$$(-) \div (-) = +$$

- El cociente de dos números enteros de diferente signo es negativo.

$$(+) \div (-) = -$$
$$(-) \div (+) = -$$

En la calculadora

Dividir números enteros

Para dividir dos números en la calculadora sin emplear paréntesis, se utiliza la tecla (−). Por ejemplo, para realizar la división $(-28) \div (-4)$, digita:

(−) 2 8 ÷ (−) 4 EXE

- Verifica en tu calculadora los cocientes obtenidos en los ejemplos 1 y 2.

Ejemplo 1

La definición de división exacta permite calcular cocientes como los siguientes.

- $18 \div (-6) = -3$, ya que $(-6) \cdot (-3) = +18$.
- $(-45) \div (-9) = +5$, porque $(-9) \cdot (+5) = -45$.
- $(-96) \div 8 = -12$, pues $+8 \cdot (-12) = -96$.
- $108 \div 12 = 9$, porque $+12 \cdot (+9) = +108$.

Ejemplo 2

Si se sabe que el producto de dos números enteros es 156 y uno de los factores es −12, para averiguar cuál es el otro factor se efectúa la división:

$$156 \div (-12) = -13$$

Ejemplo 3

Si un buzo se sumerge en el mar 15 m cada hora, se puede averiguar cuánto tiempo ha transcurrido si el buzo se encuentra a −75 m efectuando la siguiente división.

$$-75 \div (-15) = +5$$

Según lo anterior, han transcurrido 5 horas.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (división) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. En cierta ciudad se registró una temperatura de 24 °C bajo cero a las 3:00 p. m. Si a las 7:00 a. m. del mismo día la temperatura era tres veces mayor, ¿cuál sería la temperatura a esa hora?

Solución:

Para responder la pregunta, se puede dividir la temperatura presentada a las 3:00 p. m. entre 3, así:

$$(-24) \div 3 = -8$$

Lo anterior permite concluir que la temperatura presentada en la ciudad a las 7:00 a. m. fue de 8 °C bajo cero.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Calcula los cocientes.

a. $144 \div (-12)$
b. $(-82) \div 2$
c. $(-26) \div (-2)$
d. $18 \div (-6)$
e. $(-20) \div 4$
f. $(-12) \div (-12)$
g. $35 \div (-7)$
h. $(-190) \div (-10)$
i. $25 \div (-5)$
j. $(-85) \div (-5)$
k. $98 \div (-2)$
l. $(-12) \div 6$

3. Completa la Tabla 1 según las operaciones indicadas. Escribe una X cuando no se trate de una división exacta.

a	b	$a \div b$	$-2b$	$a \div (-b)$
−24	−3			
16	−4			
−25	2			
−6	66			
32	8			
6	−18			

Tabla 1

Comunicación

4. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Todo número entero dividido por otro entero, siempre da un número entero. ( )

b. Si el dividendo es múltiplo del divisor, el resultado siempre es un número entero. ( )

c. La división de números enteros es conmutativa. ( )

d. La división de números enteros no es asociativa. ( )

e. Para que el cociente sea entero, basta que el dividendo sea mayor que el divisor. ( )

Razonamiento

5. Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera.

a. $156 \div x = 13$
b. $x \div (-15) = 11$
c. $714 \div (-21) = x$
d. $-(21 \div 7) = x$

Resolución de problemas

6. ¿Qué cociente se obtiene al dividir el cuádruplo de (−12) entre (−6)?

7. ¿Cuál es el número entero x que dividido entre 4 da como resultado −15?

8. Un buzo se sumerge a una velocidad de 20 m por minuto. ¿Cuántos minutos tarda en alcanzar 900 m de profundidad?

9. Thomas tiene una deuda de $ 1 200 que debe pagar en 24 cuotas mensuales iguales. ¿Cuánto debe pagar Thomas mensualmente?

10. Un avión se aproxima a tierra perdiendo 12 000 pies de altura en 15 minutos. ¿Qué altura pierde el avión por cada minuto?

11. Una piscina tiene 2 056 L de agua. Si se vacía a razón de 257 L por hora, ¿cuántas horas demorará en vaciarse completamente?

12. La familia Martínez está integrada por cuatro personas. Entre todos compraron un automóvil por un costo de $ 38 000, que pagarán en cuotas iguales durante dos meses. ¿Cuánto dinero deberá pagar cada integrante de la familia el primer mes?

13. Susana compró tres artículos: *A*, *B* y *C*. El artículo *C* le costó $ 540; el artículo *A* le costó el doble del artículo *C* dividido en 3, y el artículo *B* le costó 5 veces el precio de *C* dividido en 10. ¿Cuánto pagó por cada artículo?

12 Ecuaciones con estructura multiplicativa

Explora

El producto de dos números es 300.

- Si uno de los factores es -15, ¿cuál es el otro?

Una manera de encontrar solución al problema consiste en plantear una ecuación como la que se muestra a continuación.

$$(-15) \cdot x = 300$$

En esta ecuación, la incógnita x representa el número que se debe hallar. Para resolverla, se aplican tanto las propiedades de las igualdades como las de la multiplicación de números enteros.

$(-15) \cdot x = 300$ ←	Ecuación
$x \cdot (-15) = 300$ ←	Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.
$x \cdot (-15) \div (-15) = 300 \div (-15)$ ←	Se divide en ambos lados de la igualdad entre (-15).
$x \cdot 1 = -20$ ←	Se realizan las divisiones indicadas en ambos lados de la igualdad.
$x = -20$ ←	Se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación y se obtiene la solución.

Por lo tanto, el número buscado es -20.

Las **ecuaciones de estructura multiplicativa** se caracterizan porque su operación principal es una multiplicación o una división.
Son de la forma: $a \cdot x = b$; $x \div a = b$, donde x es la incógnita de la ecuación.

Ten en cuenta

En general, $a \cdot b$ se puede escribir como ab o ba.

Ejemplo 1

Al resolver ecuaciones de estructura multiplicativa, conviene tener en cuenta la siguiente equivalencia.

Si:

Dividendo	Divisor
Residuo	Cociente

se prueba que:

$$\text{Dividendo} = \text{Cociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Residuo}$$

De acuerdo con lo anterior, para resolver una ecuación como $x \div (-9) = 12$, se puede encontrar la multiplicación equivalente.

$x \div (-9) = 12$ es equivalente a $x = (-9) \cdot 12$

Por lo tanto, al resolver la última ecuación se obtiene que:

$x = (-9) \cdot 12 = -108$; es decir, $x = -108$.

App

Operaciones con números enteros

Abre la aplicación *Orco* y practica las operaciones con números enteros.



Actividades resueltas

Ejercitación

1 Resuelve la ecuación $-13x + 65 = 39$.

Solución:

Se observa que la ecuación propuesta tiene una estructura a la vez aditiva y multiplicativa. Entonces:

$-13x + 65 = 39$ ←	Ecuación dada.
$\Leftrightarrow -13x + 65 - 65 = 39 - 65$ ←	Se adiciona el opuesto de 65 en ambos lados de la ecuación.
$\Leftrightarrow -13x + 0 = -26$ ←	Propiedad invertiva de la adición.
$\Leftrightarrow -13x = -26$ ←	Propiedad modulativa de la adición.
$\Leftrightarrow x \cdot (-13) \div (-13) = -26 \div (-13)$ ←	Se divide por -13 en ambos lados de la igualdad.
$\Leftrightarrow x \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ←	Propiedad modulativa de la multiplicación.

Destreza con criterios de desempeño: Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.

Resolución de problemas

2 El cociente exacto entre dos números enteros es 134. Si el divisor es -28, ¿cuál es el dividendo?

Solución:

Si se designa con x al dividendo, entonces se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x \div (-28) = 134$$

A su vez, esta ecuación es equivalente a:

$$x = 134 \cdot (-28)$$

Por lo cual,

$$x = -3\,752$$

Ten en cuenta

Dos **ecuaciones** se denominan **equivalentes** si tienen la misma solución.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones multiplicativas y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $40x = -120$ **b.** $2 + 60 + x = 83$

c. $x - 89 = 46$ **d.** $100x = 100\,000$

e. $x + 25 = -45$ **f.** $-14x = 112$

4 Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $24x = -48$ ( ) -48

b. $-2x = 96$ ( ) 4

c. $24 = x \cdot 6$ ( ) 8

d. $58x = 464$ ( ) 5

e. $12x = 60$ ( ) -2

f. $5x = -120$ ( ) -24

g. $36x = -180$ ( ) -5

5 Resuelve cada ecuación. Luego, verifica la solución hallada.

a. $5x = 25$ **b.** $2x = -234$

c. $-120 = x \cdot 8$ **d.** $-24x = -96$

e. $68x = -204$ **f.** $-5x = -9x - 24$

g. $5 + 2x = 5x - 7$ **h.** $1 + 4x - 3 = 6x + 8$

i. $25x = 120 - 5x + 10x$ **j.** $8 \cdot (x - 2) = 4 \cdot (x + 3)$

Modelación

6 Traduce los siguientes enunciados en ecuaciones y resuélvelas.

a. El doble de un número es 48.

b. Si a 800 se le resta el doble de cierto número, se obtiene 670.

c. El triple de un número adicionado con -7 equivale a -19.

d. El triple de un número disminuido en 12 es igual al número menos 4.

e. Dos veces un número disminuido en 8 equivale a 12.

f. El duplo de un número equivale al mismo número disminuido en 8.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 Si al dinero que tengo le sumo su doble y le resto \$ 3 500, me quedan \$ 19 000. ¿Cuánto dinero tenía?

8 En una finca se va a construir una piscina de dos metros de profundidad, doce metros de largo y x metros de ancho. Si el volumen de la piscina será de 192 m^3. ¿ Cuál será la medida del ancho de la piscina?

9 ¿Cuál es el área de un triángulo que tiene 9 cm de base y 18 cm de altura?

10 Un padre tiene 38 años y su hijo 10. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

11 Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 de la mañana parte de la ciudad A un automóvil hacia la ciudad B con una velocidad de 80 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad de 70 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los automóviles y qué hora será en ese momento?

13 Operaciones combinadas con números enteros

Explora

Observa cómo se resuelve la siguiente operación de dos maneras distintas.

I. $15 + 18 \div (-3)$
$= 33 \div (-3)$
$= -11$

II. $15 + 18 \div (-3)$
$= 15 + (-6)$
$= 9$

- ¿Cuál es el resultado correcto de la operación?

13.1 Operaciones sin paréntesis

Para resolver operaciones combinadas con números enteros, se les da prioridad a algunas operaciones con respecto a otras; es decir, existe una jerarquía de las operaciones que indica el orden en que estas deben ser efectuadas.

En este caso, el orden correcto en el que se debe resolver la operación presentada es: primero se realiza la división y luego la adición.

$$15 + 18 \div (-3)$$
$$= 15 + (-6) = 9$$

Para efectuar **operaciones combinadas con números enteros**, se sigue este orden:

1. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
2. Se resuelven las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Observa el orden en el que se realizan las operaciones en cada caso.

- $12 + 3 \cdot 18 - 29$
  $= 12 + 54 - 29$ ← Se resuelve primero la multiplicación.
  $= 37$ ← Se efectúan la adición y la sustracción.

- $96 \div 4 - 2 \cdot (-9)$
  $= 24 + 18$ ← Se resuelven primero la división y la multiplicación de izquierda a derecha.
  $= 42$ ← Se efectúa la adición.

- $(-7) \cdot (-4) + 9 \cdot (-3)$
  $= 28 - 27$ ← Se resuelven las multiplicaciones.
  $= 1$ ← Se efectúa la adición.

Ten en cuenta

Un **polinomio aritmético** es una expresión en la que intervienen varias multiplicaciones y/o divisiones ligadas por los signos + y −.

Ejemplo 2

Cuando en un polinomio aritmético hay dos o más operaciones del mismo orden, estas se efectúan según aparezcan de izquierda a derecha, como en el siguiente caso.

$(-30) \div 5 \cdot 3$
$= (-6) \cdot 3$ ← Se realiza primero la división.
$= -18$ ← Se resuelve la multiplicación.

Ejemplo 3

Ten en cuenta el proceso para resolver la siguiente operación.

$2 + 20 \div 5 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 4 - 8 + 4 \cdot 2 - 16 \div 4$
$= 2 + 4 + 15 + 4 - 20 - 8 + 8 - 4$
$= 2 + 4 + 15 + 4 + 8 - 20 - 8 - 4$
$= 33 - 32$
$= 1$

Destreza con criterios de desempeño: Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación y verificar resultados utilizando la tecnología.

13.2 Operaciones con paréntesis

Cuando hay **operaciones combinadas** en las que aparecen signos de agrupación, el orden para resolverlas es el siguiente:

1. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis. Si hay unos dentro de otros, se empieza por los internos.
2. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Se realizan las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 4

Observa cómo se efectúa esta operación.

$$(15 - 6) + 3 - [(20 - 5 \cdot 2) + (5 + 24 \div 4)] - (-3)$$

$(15 - 6) + 3 - [(20 - 5 \cdot 2) + (5 + 24 \div 4)] - (-3)$

$= 9 + 3 - [(20 - 10) + (5 + 6)] - (-3)$ ← Se aplica la jerarquía de las operaciones en los paréntesis.

$= 9 + 3 - [10 + 11] - (-3)$ ← Se continúa con las operaciones que se encuentran entre paréntesis.

$= 9 + 3 - 21 - (-3)$ ← Se resuelven las operaciones de los corchetes.

$= 9 + 3 - 21 + 3$ ← Se eliminan los signos de agrupación.

$= -6$ ← Se efectúan adiciones y sustracciones.

Ejemplo 5

Ten en cuenta cómo los signos de agrupación determinan el resultado de una operación combinada con números enteros, a pesar de tener los mismos términos.

- $16 - 7 \cdot 2$
  $= 16 - 14$
  $= 2$
- $(16 - 7) \cdot 2$
  $= 9 \cdot 2$
  $= 18$

Cuando delante de un paréntesis hay un signo menos, el paréntesis se puede eliminar de dos maneras, sin alterar el resultado de la operación contenida en él.

- Se efectúan primero las operaciones contenidas en el paréntesis y se halla el opuesto del resultado.
- Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y se cambia el signo de los sumandos.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Efectúa la operación $-3 - (-7 + 12)$ de dos formas distintas.

Solución:

- $-3 - (-7 + 12)$
  $= -3 - (5)$
  $= -3 - 5$
  $= -8$
- $-3 - (-7 + 12)$
  $= -3 + 7 - 12$
  $= -8$

Ten en cuenta

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como una sola cantidad.

Estos signos se eliminan uno a uno, empezando por el que esté situado más adentro, y siguiendo el orden propio de las operaciones que hay que efectuar, es decir, despejar de adentro hacia afuera.

Ten en cuenta

El signo menos $(-)$ antes de un paréntesis es la forma abreviada de multiplicar por (-1). Esto es:

$-(a + b) = -1 \cdot (a + b)$.

13 Operaciones combinadas con números enteros

MatemaTICS

Efectúa operaciones combinadas en la calculadora

Con ayuda de la calculadora científica puedes observar cómo varía el valor de un polinomio aritmético cuando se incorporan o no paréntesis.

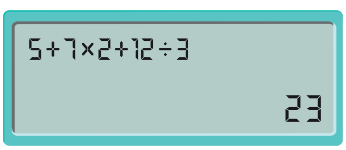
- Observa cómo se efectúa una operación sin signos de agrupación, con ayuda de la calculadora.

  Para calcular el valor de $5 + 7 \cdot 2 + 12 \div 3$, se digita la secuencia:

  5 + 7 x 2 + 1 2 ÷ 3 EXE

  En este caso, las operaciones son efectuadas en orden jerárquico: primero las multiplicaciones y divisiones que aparecen de izquierda a derecha, y luego, las adiciones.

  De esta manera, se obtiene en la pantalla:



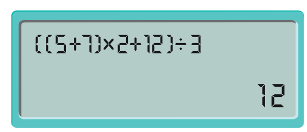
- Cuando el polinomio tiene signos de agrupación, son estos los que determinan el orden en el cual se efectúan las operaciones.

  La secuencia que permite calcular el valor del polinomio $[(5 + 7) \cdot 2 + 12] \div 3$, es la siguiente:

  ((5 + 7) x 2 + 1 2) ÷ 3 EXE

  En este polinomio, el orden de las operaciones es definido por los paréntesis: primero aquellas operaciones que están en los paréntesis contenidos en otros, y luego las operaciones con los resultados de las primeras, en orden jerárquico.

  Con lo anterior, en la calculadora se obtiene:



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza cada operación teniendo en cuenta su jerarquía.

a. $(-15) \cdot 2 - (-16) \div (-8)$
b. $(-12) + (-9) \cdot 6 \div (-2)$
c. $7 - 3 \cdot (-4) - 27 \div (-9)$
d. $(-45) - (-49) \div 7 \cdot (-6)$
e. $(-20) + 6 \cdot (-5) \div (-2)$
f. $54 \div (-3) \cdot 2 - 9 \cdot (-4)$

3 Calcula el resultado de cada operación.

a. $(3 - 8) + [5 - (-2)]$
b. $5 - [63 - 2 - (12 - 8) - 3 + 6]$
c. $18 \div [12 \div (-2)]$
d. $(5 + 3 \cdot 2 \div 6 - 4) \cdot (4 \div 2 - 3 + 6)$
e. $(7 - 2 + 4) - (2 - 5)$
f. $(-12) \cdot 3 + 18 \div (-12 \div 6 + 8)$
g. $6 \cdot \{3 \cdot [-9 + 4\,(5 \cdot 3 - 9)] - 3 \cdot (40 - 8)\}$

Comunicación

4 Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a. $15 + 18 \div 3 = (15 + 18) \div 3$
b. $96 \div [(4 - 2) \cdot 6] = 96 \div 4 - 2 \cdot 6$
c. $7 - (12 - 9) = 7 - 12 + 9$
d. $29 + [35 \div (-5)] = 29 + 35 \div (-5)$
e. $72 \div [(-9 + 3) \cdot 6] = 72 \div (-9) + 3 \cdot 6$
f. $36 \div [(-2) - (-8)] = 36 \div (-2) + (-8)$

Razonamiento

5 Sustituye la a por el número entero que haga que la igualdad sea cierta.

a. $(-15) \cdot (-8 + 3) = (-15) \cdot a$
b. $12 \div 6 \cdot (-9) + (-2) \cdot 8 = a - 16$
c. $17 - (18 - 12) \div (-3) = 17 - a$
d. $6 - 4 \cdot 9 + 30 = 6 - a$
e. $(-26) \cdot (-7 + 4) = (-26) \cdot a$
f. $(-6) \cdot (5 - 4) \cdot (-3) = (-6) \cdot a$

Destreza con criterios de desempeño: Deducir y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas.

Ejercitación

6 Ubica los paréntesis donde sea preciso para obtener cada resultado.

a. $10 \cdot 100 - 100 \div 10 = 990$

b. $15 \div 5 + 3 \cdot 5 + 9 \div 3 = 21$

c. $15 \div 3 + 2 \div (-2) + 4 \cdot 3 - 2 = 14$

d. $18 \div (3 \cdot 2) + 6 \cdot (-5) + 3 = -9$

7 Realiza las operaciones y escribe el valor absoluto de cada resultado en los círculos de la Figura 1. de tal manera que la suma de cada lado sea 20.

a. $9 - [(240 + 220) \cdot (19 - 19)]$

b. $29 - 20 + 14 - 19$

c. $(-25 - 17 + 40) + (35 - 16 - 20)$

d. $2 + 5 + 8 - 7 - 3$

e. $3 \cdot 4 + (6 + 5 - 13) - 12 \div 4$

f. $(-25 + 18 - 45 + 12) \div (26 - 20 + 46 - 32)$

g. $35 - 24 - 35 + 23$

h. $(2 \cdot 4 + 10) \div (6 - 3)$

i. $(2 \cdot 4 - 4) \cdot (6 - 4)$

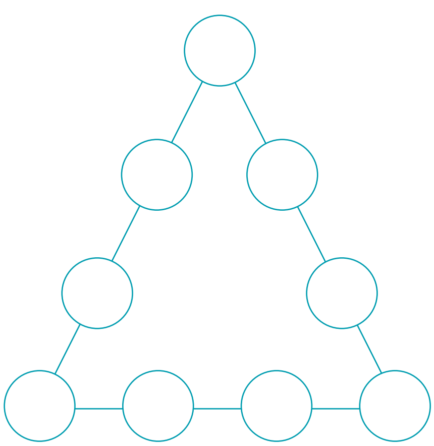


Figura 1

Razonamiento

8 Combina operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con signos de agrupación cuando sea necesario, para obtener un resultado de 31.

9 Combina las operaciones básicas para obtener 25 como resultado. Escribe cinco combinaciones, y en algunas de ellas usa paréntesis.

10 Explica cómo se puede obtener, a partir de la operación $3 + 8 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 1$, el número 20 como resultado.

11 Obtén los números del 1 al 10 combinando la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. Utiliza como única cifra el número 5, como se muestra en el ejemplo.

$$(-5) \div (-5) = 1$$

Modelación

12 Escribe una expresión matemática que represente cada situación. Luego, responde las preguntas.

a. Álvaro ganó el lunes \$ 250, el martes duplicó esta cantidad y el miércoles obtuvo tanto como la suma de lo que obtuvo el lunes y el martes. ¿Cuánto ganó en los tres días?

b. En la madrugada la temperatura estaba en 5 °C bajo cero, a las 8 a. m. la temperatura aumentó en 7 °C y a las 9 a. m. bajó 3 °C. ¿Qué temperatura había a las 9 de la mañana?

c. Gustavo tenía diez canicas, ganó cuatro en un día y durante los siguientes tres días perdió dos canicas por día. El último día ganó tres veces la mitad de la cantidad de canicas con las que inició. ¿Con cuántas canicas quedó Gustavo?

d. Si debía \$ 800, el mes pasado pagué \$120 y en este mes pagué \$ 350, ¿cuánto debo aún?

Resolución de problemas

13 En un conjunto residencial viven 13 500 personas. Hay un roble por cada 90 personas y cuatro pinos por cada 120 personas. ¿Cuántos árboles de cada clase hay en el conjunto residencial?

14 Doris recibió \$ 700 de sueldo el día lunes y pagó \$ 110 que debía. El miércoles su hermano le devolvió \$ 57 que le había prestado. El jueves, Doris gastó en compras el doble de lo que le devolvió su hermano el día anterior. ¿Cuánto dinero tiene ahora Doris?



15 Manuela compró tres cajas de chocolates. En cada una había dos chocolates rellenos de fresa, tres de piña, dos de naranja y tres de uva. Si Manuela regaló cuatro chocolates de cada caja, ¿cuántos le quedaron en total?

14 Potencias de base entera y exponente natural

Explora

En un experimento científico, la población de cierto tipo de bacterias se duplica cada minuto.



- Si el experimento da inicio con un individuo y la población continúa creciendo de la misma forma, ¿cuál será la población de bacterias al cabo de 7 minutos?

Para responder la pregunta, se puede realizar el análisis que se presenta en la Tabla 1.

Tiempo en minutos	Número de bacterias	
1	$1 \cdot 2$	2
2	$2 \cdot 2$	4
3	$2 \cdot 2 \cdot 2$	8
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16
5	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	32
6	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	64
7	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	128

Tabla 1

El producto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ se puede escribir como una **potencia** porque:

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

La potencia se representa así:

Exponente — Potencia

$$2^7 = 128$$

Base

Por lo tanto, en 7 minutos habrá 128 bacterias en total.

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. La **base** de la potencia es el factor que se repite. El **exponente** es el número de veces que se repite.

Ejemplo 1

Observa cómo se obtienen algunas potencias.

- $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3\,125$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
- $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

Ten en cuenta

Existe otra manera poco usual de hallar la potencia cuadrada de un número sin utilizar explícitamente dicha definición.

Por ejemplo:

$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$

$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

- Halla 2^2 y 5^2 con este método.

14.1 Potencias de base un número entero negativo

- Si la base es negativa y el exponente es par, el valor de la potencia es positivo.
- Si la base es negativa y el exponente es impar, el valor de la potencia es negativo.

Ejemplo 2

a. $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$, ya que la base es negativa y el exponente impar.

b. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$, puesto que la base es negativa y el exponente es par.

c. $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$, porque la base es negativa y el exponente es par.

d. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$, pues la base es negativa y el exponente es impar.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.

14.2 Operaciones con potencias de la misma base

El **producto de potencias de la misma base** es igual a otra potencia de la misma base y con el exponente igual a la suma de los exponentes de los factores. En general, se cumple que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 3

María tiene un restaurante y quiere saber cuántos platos se utilizan en él, para lo cual compra 27 estantes, cada estante con nueve divisiones y en el que caben tres platos por división. Una manera de calcular la cantidad total de platos consiste en realizar la siguiente multiplicación.

$$27 \cdot 9 \cdot 3 = 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$$

Por lo tanto, en el restaurante de María se utilizan 729 platos en total.

El **cociente de potencias de la misma base** es igual a otra potencia de la misma base y con el exponente igual a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor. En general, se cumple que:

$$a^m \div a^n = a^{m-n};\ si\ a \neq 0$$

Ejemplo 4

De acuerdo con la propiedad anterior, el cociente $(-5)^6 \div (-5)^4$ se puede calcular como se muestra a continuación.

$$(-5)^6 \div (-5)^4 = (-5)^{6-4} = (-5)^2 = 25$$

La **potencia de una potencia** es igual a la misma base elevada al producto de los exponentes. En general, se cumple que:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo 5

Para comprender mejor la propiedad anterior, se puede analizar esta secuencia.

$$[(-7)^2]^3 = (-7)^2 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^2 = (-7)^{2+2+2} = (-7)^6$$

Ejemplo 6

Observa cómo resolver la potencia $\dfrac{[(-2)^3]^4 \cdot 4^4 \cdot [(-2)^3]^2 \cdot (4^3)^3}{(-2)^6 \cdot 4^7}$.

$$\frac{[(-2)^3]^4 \cdot 4^4 \cdot [(-2)^3]^2 \cdot (4^3)^3}{(-2)^6 \cdot 4^7} = \frac{(-2)^{12} \cdot 4^4 \cdot (-2)^6 \cdot 4^9}{(-2)^6 \cdot 4^7}$$

$$= \frac{(-2)^{18} \cdot 4^{13}}{(-2)^6 \cdot 4^7} = (-2)^{12} \cdot 4^6$$

Ten en cuenta

El número 365 es un número curioso, ya que es el único que cumple con la propiedad

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

Ten en cuenta

Todo número diferente de cero elevado a la 0 es igual a 1. En general:

$$a^0 = 1;\ si\ a \neq 0$$

14 Potencias de base entera y exponente natural

14.3 Operaciones con potencias del mismo exponente

Cálculo mental

Multiplicar por potencias de 10

Para calcular el resultado de la multiplicación de un número por una potencia de 10, se deja el mismo número y se añaden tantos ceros como indique el exponente de la potencia de 10. Por ejemplo:

$-25 \cdot 10 = -250$

$53 \cdot 10^2 = 5\,300$

$7 \cdot 10^3 = 7\,000$

- Calcula $-12 \cdot 10^4$ y $2 \cdot 10^5$.

Ten en cuenta

En la potenciación:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$
$$(a - b)^n \neq a^n - b^n$$

El **producto de potencias con el mismo exponente** es una potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. En general, se cumple que:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo 7

La multiplicación $(-2)^3 \cdot 3^3$ se puede calcular de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}(-2)^3 \cdot 3^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\\ &= [(-2) \cdot 3] \cdot [(-2) \cdot 3] \cdot [(-2) \cdot 3]\\ &= [(-2) \cdot 3]^3\end{aligned}$$

Ejemplo 8

Para efectuar en forma abreviada un producto de potencias con igual exponente, se aplica la anterior definición, así:

$$(-7)^2 \cdot 3^2 = (-7 \cdot 3)^2 = (-21)^2 = 441$$

El **cociente de potencias con el mismo exponente** es una potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases. En general, se cumple que:

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n;\ si\ b \neq 0$$

Ejemplo 9

En la división $(-6)^4 \div 3^4$, el dividendo y el divisor son potencias que tienen diferente base y el mismo exponente. Para obtener el cociente, se puede proceder así:

$$\begin{aligned}(-6)^4 \div 3^4 &= [(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)] \div (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)\\ &= [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3] \cdot [(-6) \div 3]\\ &= [(-6) \div 3]^4\end{aligned}$$

Ejemplo 10

Para efectuar en forma abreviada un cociente de potencias con igual exponente, se aplica la anterior definición, así:

$$(-4)^3 \div 2^3 = (-4 \div 2)^3 = (-2)^3 = -8$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve.

a. $(-4)^8 \div (-4)^3$ **b.** $[(-3)^4 \cdot 2^4] \div (-6)^3$ **c.** $[(-5)^4]^3 \div [(-5)^2 \cdot (-5)^6]$

Solución:

a. $(-4)^8 \div (-4)^3 = (-4)^{8-3} = (-4)^5$

b.
$$\begin{aligned}[(-3)^4 \cdot 2^4] \div (-6)^3 &= [(-3) \cdot 2]^4 \div (-6)^3\\ &= (-6)^4 \div (-6)^3\\ &= (-6)^{4-3} = (-6)^1\\ &= -6\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}[(-5)^4]^3 \div [(-5)^2 \cdot (-5)^6] &= (-5)^{4 \cdot 3} \div [(-5)^{2+6}]\\ &= (-5)^{12} \div (-5)^8\\ &= (-5)^{12-8}\\ &= (-5)^4\\ &= 625\end{aligned}$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica el signo de cada potencia sin efectuar la operación.

a. $(-3)^{15}$ b. $(-5)^{18}$ c. $(-4)^{22}$

3 Escribe los siguientes productos como potencias.

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b. $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

c. $(-4) \cdot (-4)$ d. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

e. $10 \cdot 10 \cdot 10$ f. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

4 Completa la Tabla 2.

Potenciación	Base	Exponente	Potencia
			-125
$(-2)^7$			
$(-3)^5$			
		3	-64
	6		36
$(-1)^6$			
3^2			

Tabla 2

5 Expresa cada potencia como producto y calcula su valor.

a. $(-13)^2$ b. 4^3 c. $(-6)^4$

d. $(-3)^7$ e. 2^8 f. 0^9

g. $(-8)^1$ h. 3^5 i. $(-1)^6$

6 Completa la Tabla 3. Observa el ejemplo.

Operación	Aplicando propiedades	Sin aplicar propiedades
$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2$	$2^{3+4+2} = 2^9 = 512$	$8 \cdot 16 \cdot 4 = 512$
$(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^3$		
$(-3)^2 \cdot (-3)$		
$[(-2)^4]^3$		
$(-7)^5 \div (-7)^3$		
$(-6)^4 \div 3^4$		

Tabla 3

7 Expresa como una sola potencia.

a. $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot 2$ b. $[(-7)^3]^5$

c. $(-10)^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4$ d. $a^8 \div a^3$

e. $(-5)^6 \div (-5)^3 \cdot (-5)$ f. $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$

Comunicación

8 Resuelve cada par de potencias y compara los resultados.

a. $(-3)^4$ y $(-4)^3$ b. 2^5 y 5^2

c. $(-2)^4$ y -2^4 d. $(-3)^3$ y -3^3

Razonamiento

9 Aplica las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{(-5)^3 \cdot 4^6 \cdot (-5)^2}{4 \cdot (-5)^4}$

b. $\dfrac{[(-2)^3]^4 \cdot (2^2)^3 \cdot [(-3)^4]^3}{2^5 \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^{12}}$

c. $\dfrac{(-5)^6 \cdot 3^4 \cdot (-5) \cdot 3^5}{3^3 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)^2}$

10 Completa la expresión para calcular el número de cubos que forman la pirámide de la Figura 1.

$1 + 3^{\square} + 5^{\square} = \square$

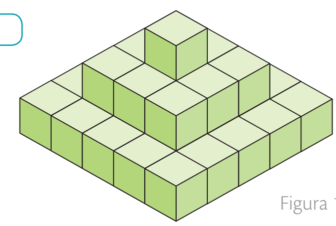


Figura 1

Si la base de la Figura 1 es una de las caras de un cubo, ¿cuántos cubos pequeños hacen falta para completar el cubo más grande?

11 Halla el valor de la x en cada caso, de tal forma que las igualdades sean ciertas.

a. $(-2)^5 \cdot (-2)^x = (-2)^7$

b. $x^3 = -27$

c. $(-5)^{12} \div [(-5)^4]^x = (-5)^4$

d. $3^9 \cdot x^9 = (-6)^9$

e. $[(-3)^x]^3 \div (-3)^{11} = (-3)$

f. $(-4)^2 \cdot (-4)^4 = x^6$

Resolución de problemas

12 Sonia trajo de su viaje tres paquetes con tres cajas cada uno; cada caja tiene tres bolsas, y cada bolsa, dos lápices. ¿Cuántos lápices trajo Sonia de su viaje?

13 En origami se toma una hoja de papel y se dobla por la mitad, determinando así dos regiones. Luego, se vuelve a doblar una vez más y se obtienen cuatro regiones. Si se continúa el procedimiento hasta hacer ocho dobleces, ¿cuántas regiones se obtienen?

14 En una investigación respecto a cómo aumenta el número de conejos con el tiempo, se comienza con tres conejos que se triplican al mes. ¿Cuántos conejos habrá a los cuatro meses si la población continúa creciendo de la misma forma?

15 Raíces cuadradas

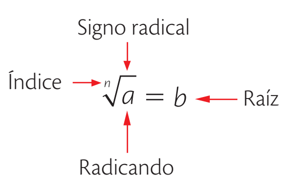
Explora

Se dispone de un espacio cuadrado de 25 cm de lado para ubicar una pintura.



SM Ediciones

- Si la pintura, también de forma cuadrada, tiene un área de 400 cm², ¿es posible ubicarla en el espacio disponible?



Ten en cuenta

La radicación es una operación inversa de la potenciación, con la cual se busca la base conociendo el exponente y la potencia.

Ten en cuenta

Para hallar raíces cuadradas es importante conocer los cuadrados perfectos.

Si se quiere calcular el cuadrado de un número, solo hay que multiplicarlo por sí mismo.

15.1 Raíz cuadrada exacta

Para modelar la situación, es preciso recordar que el área de un cuadrado de lado L viene dada por:

$$\text{Área} = L^2$$

En este caso,

$$400 = L^2$$

Entonces, para calcular el valor de L, se puede hacer uso de la radicación. Es decir:

$$L = \sqrt{400}$$

Lo anterior significa que se debe hallar un número cuyo cuadrado sea 400.

El número buscado es 20, ya que $20^2 = 400$.

Esto quiere decir que el lado de la pintura es 20 cm. Según esto, se deduce que sí se puede ubicar la pintura en el espacio disponible.

La **raíz cuadrada exacta** de un número es otro número que multiplicado por sí mismo sea igual al primer número. Se expresa así:

$$\sqrt{a} = b \longleftrightarrow b^2 = a$$

Hallar la raíz de un número a significa encontrar un número b que, multiplicado por sí mismo, sea igual a a.

Ejemplo 1

El número 36 tiene dos raíces cuadradas, ya que hay dos números, 6 y -6, que cumplen que $6^2 = (-6)^2 = 36$.

Ejemplo 2

Como se sabe que $5 \cdot 5 = 25$ y $(-5) \cdot (-5) = 25$, entonces:

La raíz cuadrada positiva de 25 es 5. Se escribe: $\sqrt{25} = +5$

La raíz cuadrada negativa de 25 es -5. Se escribe: $\sqrt{25} = -5$

15.2 Raíz cuadrada entera

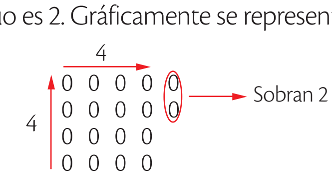
La **raíz cuadrada entera** de un número es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número.

El **residuo de la raíz cuadrada entera** de un número es la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera.

Las **raíces cuadradas enteras** son aquellas en las que el resultado no es exacto y, al igual que en la división, tienen un residuo.

Ejemplo 3

Para hallar la raíz cuadrada de 18, se tiene que los cuadrados más cercanos son $4^2 = 16$ y $5^2 = 25$. Se toma 4^2 porque no excede al 18. Entonces, el residuo es la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz entera, $18 - 16 = 2$. Por tanto, $\sqrt{18} = 4$ y su residuo es 2. Gráficamente se representa así:



Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.

15.3 Producto de raíces cuadradas

En el **producto de raíces cuadradas** se multiplican los radicandos y se mantiene el índice de la raíz. En general, se cumple que:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Ejemplo 4

En las siguientes operaciones se verifica la propiedad anterior.

a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$ **b.** $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = \pm 10$

Ejemplo 5

El producto $5 \cdot \sqrt{18} \cdot 4 \cdot \sqrt{8}$ se puede calcular efectuando primero el producto de los números y, a continuación, el producto de las raíces cuadradas.

$$5 \cdot \sqrt{18} \cdot 4 \cdot \sqrt{8} = 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{18 \cdot 8} = 20 \cdot \sqrt{144} = 20 \cdot 12 = 240$$

Ejemplo 6

En ocasiones se hace necesario invertir la regla. Observa.

$$\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$$

Ejemplo 7

Para resolver la operación $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$, se aplica la propiedad distributiva.

$$\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{18} - \sqrt{6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6}$$

Ten en cuenta

La radicación no es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

15.4 Cociente de dos raíces cuadradas exactas

En el **cociente de raíces cuadradas** se dividen los radicandos y se mantiene el índice de la raíz. En general, se cumple que:

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}\text{; si } b \neq 0$$

Ejemplo 8

En la división $\sqrt{18} \div \sqrt{2}$, el dividendo y el divisor son raíces cuadradas. Para obtener el cociente, se procede así:

$$\sqrt{18} \div \sqrt{2} = \sqrt{18 \div 2} = \sqrt{9} = 3$$

15 Raíces cuadradas

15.5 Potencia de una raíz cuadrada

Al elevar una raíz cuadrada a un exponente m, se obtiene otra raíz cuadrada con el radicando elevado a m. En general, se cumple que:

$$\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$$

Ten en cuenta

Si a es un número entero y m es un número natural, entonces:

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$$

Ejemplo 11

Para comprender mejor la propiedad anterior, analiza las siguientes operaciones.

a. $\left(\sqrt{36}\right)^5 = \sqrt{36^5} = \sqrt{\left(6^2\right)^5} = \sqrt{6^{10}} = 6^{\frac{10}{2}} = 6^5$

b. $\left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Mariana tiene un terreno de forma cuadrada, con un área de 169 m². Como desea cercarlo, necesita saber cuántos metros de malla metálica debe comprar.

Solución:

Como el terreno tiene forma cuadrada y se sabe que el área del cuadrado se halla elevando al cuadrado la longitud del lado: A_c = lado², entonces se tiene que $169 = l^2$ y, por tanto, $l = \sqrt{169} = 13$. Esto significa que el lado del terreno mide 13 m.

Por último, para saber cuántos metros de malla metálica debe comprar Mariana, es necesario calcular el perímetro del terreno. Como el perímetro es la suma de los lados o $4 \cdot l$, tenemos que $4 \cdot 13 = 52$ m.

Mariana tiene que comprar 52 m de malla metálica.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Indica si son o no cuadrados perfectos los siguientes números.

a. 64 b. 70
c. 100 d. 225
e. 111 f. 144

Ejercitación

3 Calcula las siguientes raíces.

a. $\sqrt{144}$ b. $\sqrt{121}$
c. $\sqrt{81}$ d. $\sqrt{625}$
e. $\sqrt{1}$ f. $\sqrt{196}$

4 Calcula la raíz cuadrada entera y el residuo de los siguientes números.

a. 57 b. 39
c. 13 d. 55
e. 110 f. 66

5 Averigua a qué números se les halló la raíz cuadrada para que se obtuvieran las siguientes raíces enteras y residuos.

a. Raíz = 15, residuo = 6
b. Raíz = 26, residuo = 12
c. Raíz = 28, residuo = 0
d. Raíz = 12, residuo = 9
e. Raíz = 15, residuo = 4

Razonamiento

6 Indica si las raíces cuadradas de los siguientes números son exactas o enteras.

a. 68 b. 169
c. 36 d. 82
e. 56 f. 81
g. 72 h. 100
i. 24 j. 75

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.

7 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El producto de dos cuadrados perfectos es un cuadrado perfecto. ( )

b. La suma de dos cuadrados perfectos es un cuadrado perfecto. ( )

c. La raíz cuadrada exacta de un cuadrado perfecto es él mismo. ( )

d. El residuo de una raíz cuadrada exacta es 0. ( )

e. $\sqrt{81} = \pm 8$ ( )

f. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$ ( )

g. $\sqrt{64} = \pm 8$ ( )

8 Analiza cada situación y responde las preguntas.

a. ¿Existe un número entero que elevado al cuadrado dé -1? ¿Y -4? ¿Y -9?

b. ¿Por qué no existe un número entero que corresponda a la raíz cuadrada de un entero negativo?

c. ¿Cuántas raíces cuadradas tiene 121?

d. ¿Cómo se puede justificar que -2 es una raíz cuarta de 16?

e. El cubo de un cuadrado perfecto, ¿es otro cuadrado perfecto?

9 Resuelve aplicando las propiedades de la radicación.

a. $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}$

b. $\sqrt{256} \div \sqrt{16}$

c. $\left(\sqrt{6^2}\right)^3$

d. $\sqrt{32^3} \div \sqrt{2^3}$

e. $\left(\sqrt{2^4}\right)^2 \div \sqrt{16}$

f. $\sqrt{\left(3^2\right)^3}$

g. $\sqrt{25 \cdot 36 \div 25}$

h. $\sqrt{3600}$

i. $\sqrt{100 \div 4 \cdot 49}$

j. $\sqrt{36^3}$

10 Determina el número por el que se debe sustituir la letra *x* para que sean ciertas las igualdades.

a. $\sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{x}$

b. $\sqrt{x} \div \sqrt{49} = \sqrt{16}$

c. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{36}$

d. $\sqrt{x} = \sqrt{64} \div \sqrt{16}$

e. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{100}$

Resolución de problemas

11 ¿Cuál es el menor número de años que deben transcurrir desde el 2016 para que el año sea un cuadrado perfecto? ¿Cuántos años del tercer milenio son cuadrados perfectos?

12 Se quiere alambrar una parcela cuadrada de 1 225 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros de malla metálica hay que comprar?

13 Se quiere construir un cuadrado con cuadraditos de un centímetro de lado. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado que se construye con 121 cuadraditos?

14 El número de páginas de un libro es un cuadrado perfecto más 13, y si se le suma 20, se obtiene el cuadrado perfecto siguiente. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

15 Un grupo de estudiantes va a construir unas señales informativas que tengan forma cuadrada. Deben hacerlas de forma que su área sea de 355 216 mm^2. ¿Cuántos milímetros debe medir el lado de cada señal?

16 ¿Cuál es la máxima distancia, en línea recta, que podrá recorrer un jugador en un campo de fútbol de 20 m de largo y 15 m de ancho? (Aplica el Teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$).

17 Se quiere construir un tablero cuadrado que tenga una superficie de 576 cm^2 y que a su vez contenga 144 casillas iguales. ¿Cuánto medirá el lado de cada casilla?

18 El área de un terreno de forma cuadrada es 256 m^2. ¿Cuánto medirá el perímetro del terreno?

19 La mitad del cuadrado de la distancia que recorre un ciclista en 30 minutos es 162 km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá el ciclista en 2 horas?

20 Un cuadro tiene un área de 400 cm^2. Si se aumenta un centímetro por lado, ¿cuál será el perímetro del nuevo cuadro?

21 Un álbum se llena con 180 láminas y tiene 20 páginas. Si en cada página hay el mismo número de láminas, dispuestas en igual número de columnas y de filas, ¿cuántas láminas hay en cada columna?

16 Jerarquía de las operaciones con potencias y raíces

Explora

Sandra debe solucionar la siguiente operación combinada:

$14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [(-2)^2 \cdot 2 - 7]\} + (3^2 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 2^3 \div 2)$.

Como no sabe cómo empezar, le pide ayuda a su amigo Luis.

- ¿Qué le responde Luis a Sandra?

Luis le dice a Sandra que para este tipo de ejercicios matemáticos, donde intervienen paréntesis y varias operaciones, lo primero que se resuelve son las potencias, así:

$$14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [(-2)^2 \cdot 2 - 7]\} + (3^2 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 2^3 \div 2)$$
$$= 14 - \{3 + 4 \cdot 3 - [4 \cdot 2 - 7]\} + (9 + 6 - 6 \cdot 3) + 3 - (6 - 8 \div 2)$$

Luego, se calculan los productos y cocientes como se muestra a continuación.

$$= 14 - \{3 + 12 - [8 - 7]\} + (9 + 6 - 18) + 3 - (6 - 4)$$

Finalmente, se calculan las sumas y diferencias; primero las que están dentro de los paréntesis y después las que se obtienen de izquierda a derecha.

$$= 14 - \{15 - 1\} + (-3) + 3 - 2$$
$$= 14 - 14 + (-3) + 3 - 2 = -2$$

Para efectuar **operaciones combinadas con potencias y raíces**, se sigue este orden:

- Se efectúan las potencias y raíces.
- Se resuelven las operaciones que estén dentro de los signos de agrupación. Si hay varios, unos dentro de otros, se empieza por los internos.
- Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Se calculan las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Al resolver la operación $[(-2)^2]^3 + (-36) \div \sqrt{9}$, se verifica el orden mencionado.

1. Se resuelve la potencia y la raíz. $= 4^3 + (-36) \div 3$

2. Se realiza la potencia y la división. $= 64 + (-12)$

3. Se calcula la suma. $= 52$

Ejemplo 2

Para solucionar la operación $300 - [\sqrt{121} + (-3)^2] + 12^2 \div 2^4$, se aplica la jerarquía de las operaciones.

1. Se efectúa la raíz y las potencias. $= 300 - [11 + 9] + 144 \div 16$

2. Se resuelve el corchete y la división. $= 300 - 20 + 9$

3. Se calcula la diferencia y la suma. $= 289$

Ejemplo 3

Observa cómo se resuelve la siguiente operación.

$$2 \cdot (3 - 5)^3 + [12 \cdot \sqrt{12 - 3} \div 6 \cdot (-2)^2 - 12]$$
$$= 2 \cdot (-2)^3 + [12 \cdot \sqrt{9} \div 6 \cdot 4 - 12]$$
$$= 2 \cdot (-8) + [12 \cdot 3 \div 6 \cdot 4 - 12]$$
$$= -16 + [36 \div 6 \cdot 4 - 12]$$
$$= -16 + [6 \cdot 4 - 12]$$
$$= -16 + [24 - 12]$$
$$= -16 + 12$$
$$= -4$$

Ten en cuenta

Si un paréntesis que no tiene potencia va precedido del signo +, se suprimirá manteniendo el signo de los términos que contenga.

Si un paréntesis que no tiene potencia va precedido del signo –, al suprimir el paréntesis hay que cambiar el signo a todos los términos que contenga.

TIC — TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://escuela2punto0.educarex.es/Matematicas/Matematicas-ESO-Extremadura/Numeros_enteros._Jerarquia_de_las_operaciones

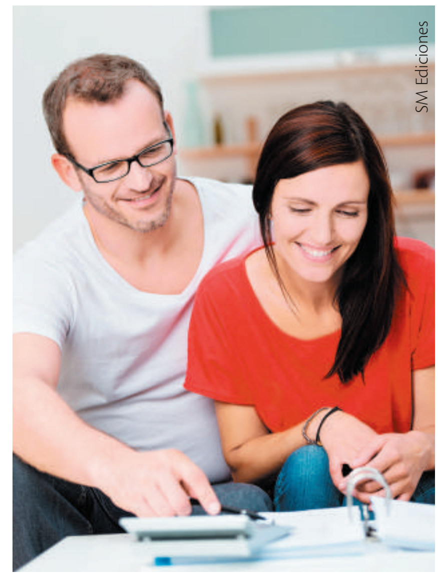
Refuerza el tema de jerarquía de las operaciones.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números enteros no negativos en la solución de ejercicios numéricos con operaciones combinadas, atendiendo la jerarquía de la operación.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Pedro recibió de su padre \$ 6 250 y de su madre \$ 350. A la mitad de lo que recibió, él agregó \$ 520 para pagarle a su hermana Claudia una deuda. ¿Cuánto dinero le debía Pedro a Claudia?


SM Ediciones

Solución:

Para responder la pregunta, se realiza el siguiente procedimiento.

$6\,250 + 350$ ← Dinero que recibe Pedro de sus padres.

$(6\,250 + 350) \div 2$ ← Mitad del dinero que recibió Pedro.

$[(6\,250 + 350) \div 2] + 520$ ← Pedro agregó \$ 520 a la mitad del dinero que recibió.

El valor de la expresión anterior se halla como sigue.

$$[(6\,250 + 350) \div 2] + 520 = [6\,600 \div 2] + 520$$
$$= 3\,300 + 520$$
$$= 3\,820$$

Por lo tanto, Pedro le debía a su hermana \$ 3 820.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes operaciones.

a. $-\{-[(28 \div 7) \cdot (44 \div 4)]\}$

b. $(-7 + 4)^4 \div 3^2 - \sqrt{25} \cdot (-2)$

c. $9 + 3 \cdot \{32 \div 8 + 4 \cdot [2 \cdot (4 \div 4 + 1)]\} - 2$

d. $-5 - \{[(-3)^3 \div \sqrt{9}] - 12 \div (-2)^2\} + \sqrt{4^3}$

e. $[(-14 - 4) \div 2 + (-13 - 3) \div 4] + 9 \cdot 6 \div 18$

f. $(-8 + 3) \cdot 4 - 35 \div (-3 - 2) + 8 \cdot 6 \div 4$

3 Determina el punto de fusión de los siguientes elementos químicos (medidas dadas en grados Celsius.

a. Hierro: $(2 \cdot 10^3) - 462$

b. Calcio: $(9 \cdot 10^2 - 13) - (9 \cdot 5)$

c. Cobre: $10^3 + (10 \cdot 9) - 7$

d. Azufre: $(2 \cdot 100) - 9^2 + (-4)$

e. Oro: $10^3 + (9 \cdot 8) - 8$

Razonamiento

4 Identifica el error de la operación y corrígela.

$$3 \cdot 9 - 5 + 48 \cdot 3 - 8 + 6 \cdot 2$$
$$= 27 - 5 + 144 - 8 + 6 \cdot 2$$
$$= 27 - 5 + 144 - 2 \cdot 2$$
$$= 27 - 5 + 144 - 4 = 162$$

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

Resolución de problemas

5 Laura y Lina han resuelto cada una la siguiente expresión: $5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$. ¿Cuál de las dos la ha resuelto correctamente?

Laura	Lina
$5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$	$5 + 3 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$
$8 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$	$5 + 12 + 10 - 6$
$32 + 10 - 2 \cdot 3$	$17 + 10 - 6$
$42 - 2 \cdot 3$	$27 - 6$
$40 \cdot 3$	21
120	

6 Amanda recibe cierta cantidad de dinero, que se triplica con respecto a la cantidad recibida el día anterior. Si el primer día Amanda recibe \$ 10, ¿cuánto dinero recibirá al cabo de cinco días?

7 Andrea desea comprar un libro. Ella tiene \$ 12, su papá le duplicó esta cantidad, pero ella gastó \$ 2 con sus amigas. Luego, recibió la mitad de lo que tenía en ese momento su mamá. Si la mamá tenía en ese instante \$ 8, ¿cuánto dinero tiene Andrea para el libro?

8 Un autobús hace tres paradas: en la primera se suben trece personas, en la segunda se bajan siete y se suben nueve, y en la tercera se suben cinco pasajeros. ¿Cuántos pasajeros quedan después de la tercera parada?

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. El número que se encuentra 5 unidades a la izquierda del –2 en la recta numérica es el:

A. +3

B. –3

C. –5

D. –7

2. El número que se encuentra 9 unidades a la derecha del – 7 es el:

A. +2

B. 0

C. –2

D. –3

3. El dueño de una caja fuerte de seguro giratorio, coloca la rueda en cero y hace los siguientes movimientos: 13 hacia la derecha, 7 hacia atrás, 3 hacia adelante, 14 hacia atrás y 2 hacia adelante. La posición final de la rueda es:

A. 21

B. –15

C –3

D. –1

4. Mamá coloca en la nevera una tarrina de carne fileteada a 17°C y la saca tres días después a – 12°C. La variación de la temperatura fue de:

A. 5 °C

B. 15 °C

C. 20 °C

D. 29 °C

5. De los números: –149, 0, –1, –2, el mayor es:

A. –149

B. –2

C. –1

D. 0

6. Si en mi cuenta bancaria tenía un saldo en contra de $ 25 y me depositan $ 455 de mi sueldo, luego realizó tres débitos: $ 35 para el pago de luz, $ 15 de agua, $ 310 de mi tarjeta de crédito, me depositan $ 60 por un trabajo que realicé. El saldo en mi cuenta bancaria es de:

A. $ 130

B. $ 155

C. $ 10

D. $ –55

7. La suma y resta alternada de los 7 primeros números primos es:

A. 5

B 0

C. – 7

D. – 8

8. La suma y resta alternada de los 7 primeros términos de la sucesión –11, –7, –3, 1, 5, 9… es:

A. –23

B. –29

C. 20

D. 26

9. Tres hombres trabajan en una empresa, uno de ellos gana $ 240, el segundo gana el doble del primero disminuido en $ 60 y el tercero la mitad de lo que gana el segundo más la mitad de lo que gana el primero. El total del dinero que ganan entre los tres es:

A. $ 1 000

B. $ 990

C. $ 970

D. $ 800

Indicadores de logro:

- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números enteros.
- Aplica las operaciones con números enteros en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números enteros.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.
- Resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z.

10. Sean: a=2, b=−3, c=−5 y d = 8. Si se reemplazan estos valores en la operación −(2b + c) +3(−4a + d) el resultado es:

A. 15

B. 11

C. −11

D. −15

11. Juan tiene 3 cromos menos que Rafael, si juntos tienen 33 cromos, la máxima cantidad de cromos que podría tener Rafael es:

A. 16

B. 18

C. 20

D. 21

12. Isaac tiene 5 carros menos que el triple de carros que tiene Paúl. Brandon tiene 15 carros y Paúl tiene la tercera parte de los carros que tiene Brandon, entonces Isaac tiene:

A. 10 carros

B. 11 carros

C. 12 carros

D. 13 carros

13. La suma $2\sqrt{5}+\sqrt{45}-2\sqrt{80}$ es:

A. $-9\sqrt{5}$

B. $-7\sqrt{5}$

C. $-3\sqrt{5}$

D. $-\sqrt{5}$

14. Los ingresos de una empresa están creciendo de forma que se duplican cada 8 horas, en 24 horas sus ganancias se habrán incrementado:

A. 16 veces

B. 8 veces

C. 4 veces

D. 3 veces

15. Al resolver la siguiente operación $[(-2)^5]^3 \div [(-2)^2\ (-2)^3]^2$ se obtiene:

A. 16

B. −16

C. 32

D. −32

16. El resultado de resolver la ecuación

$8 + 5\,(3x - 5) - 2\,(8x + 5) = 2x$ es:

A. −9

B. 30

C. 9

D. 7

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Conociendo qué son los recursos



La palabra "recurso" se utiliza en diferentes contextos y engloba los medios que se tienen o se necesitan para lograr algún fin. Es muy común interpretar su significado en el sentido de tener medios económicos para cumplir nuestras metas, sueños o ambiciones, pero existen otras interpretaciones que se deben conocer.

En una empresa, se denominan recursos a las personas, maquinaria, tecnología, materia prima y dinero que se emplean como medios para lograr los objetivos de dicha entidad.



Al elaborar cualquier trabajo manual, los recursos son los insumos materiales necesarios para llevarlo a cabo.



Los recursos naturales

Son aquellos elementos de la naturaleza que le sirven al ser humano para satisfacer sus necesidades y que son valiosos por contribuir a su bienestar y desarrollo de manera directa (materias primas, minerales, alimentos) o indirecta (servicios ecológicos).



SM Ediciones

Los recursos naturales pueden ser renovables, no renovables e inagotables y esto depende de que tengan o no capacidad de regenerarse.



Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1 Lee el siguiente texto:



El crecimiento de la población y la contaminación o destrucción de fuentes naturales de agua limpia, por el mal uso que les hemos dado, están poniendo en peligro la provisión de agua del planeta.

Según la FAO, a partir de 1950 se ha triplicado el consumo del agua en todo el mundo. Además, el consumo por habitante ha aumentado casi en un 50% (800 metros cúbicos por habitante); el sector agrícola (70% del total) y el sector industrial (20% del total) son los que utilizan la mayor parte del agua que se consume.



Recursos no renovables: Son aquellos que una vez consumidos no pueden regenerarse de forma natural, en una escala de tiempo humana. Los recursos naturales no renovables existen en cantidades limitadas y no pueden aumentar con el paso del tiempo; la cantidad disponible de estos recursos va disminuyendo con su uso.



El petróleo, los minerales, los metales y el gas natural son ejemplos de recursos naturales no renovables.



Recursos renovables: Son aquellos que pueden regenerarse mediante procesos naturales; esto significa que aunque sean utilizados pueden seguir existiendo siempre que no se sobrepase su capacidad de regeneración.



Algunos recursos naturales renovables son: el agua, los bosques, las plantas y los animales.



Recursos inagotables: Son aquellos recursos renovables que no se agotan con el uso o con el paso del tiempo.



La luz solar, el viento y el aire son ejemplos de recursos naturales inagotables.

La abundancia y la escasez de un recurso no se definen a partir de las cantidades existentes de este, sino a partir de cuánto requiere la sociedad y de las cantidades que se proyecte producir o extraer. Cuando la demanda de un recurso es mayor que su producción, aparece la escasez; en el caso contrario se produce abundancia. Por ejemplo, el petróleo es un recurso no renovable y existe el riesgo de que en algunos años sea un bien escaso. Por otro lado, aunque los recursos sean renovables, la explotación intensiva puede agotarlos, como ocurre con el suelo.

Pregunta tipo Saber

En una fábrica textil se sabe que en un mes, por cada 1 000 unidades producidas, se usa una máquina con tres operarios y se requieren cuatro personas en labores manuales de finalización de producto; además, por cada 5 000 unidades se emplean tres personas para la distribución en puntos de venta.



SM Ediciones

La afirmación correcta en relación con la producción de 5 000 unidades es:

A. Se emplearán 50 personas, distribuidas en la máquina, la finalización y la distribución.

B. Se necesita el doble de personas en cada máquina, en la finalización y en la distribución.

C. Son necesarias 38 personas organizadas en cada una de las cinco máquinas, la finalización manual y la distribución.

D. Se requiere usar cinco máquinas y 20 personas para la finalización del producto y la distribución.

2. Teniendo en cuenta el texto y los conceptos de abundancia y escasez, escribe un párrafo en el cuál plantees tu opinión frente a la pregunta: ¿El agua es, en verdad, un recurso renovable?

3. Reúnete con dos compañeros. Elaboren un listado sobre la forma como usan el agua a diario. Luego, clasifiquen estas actividades en la siguiente tabla:

Buen uso	
No muy buen uso	
Mal uso	

Trabajo en grupo

Organiza junto con tu profesor una campaña de reciclaje y aprovechamiento de recursos en tu salón .

a. Elabora, con ayuda de tus compañeros, una lista de los elementos que usan en el colegio y que podrían reciclar.

b. Asignen un líder por cada producto. Dicho líder recibirá el material que recolecten.

c. Asignen días específicos para la recolección de cada elemento.

d. Entreguen el material clasificado a las directivas y promuevan el reciclaje en los otros cursos.

Habilidades digitales

Diseña un folleto en Canva

Canva es una herramienta con la que puedes elaborar una gran variedad de diseños *online* para organizar información y compartirla. Con tus compañeros diseña y distribuye un folleto en Canva.

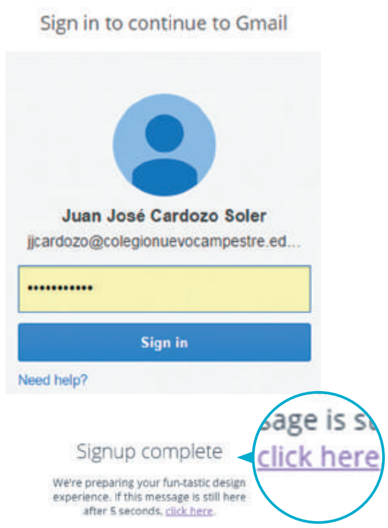
1 Abre tu cuenta en Canva

a. Ingresa a www.canva.com.

b. Si ya tienes un correo de Gmail haz clic en Sign in with Google, selecciona tu cuenta y escribe la contraseña; de lo contrario, abre uno en www.gmail.com.

c. Haz clic en el botón "Aceptar" y luego en el vínculo "Click here".

d. Haz clic en el botón "Show me how it's done" para observar un tutorial.



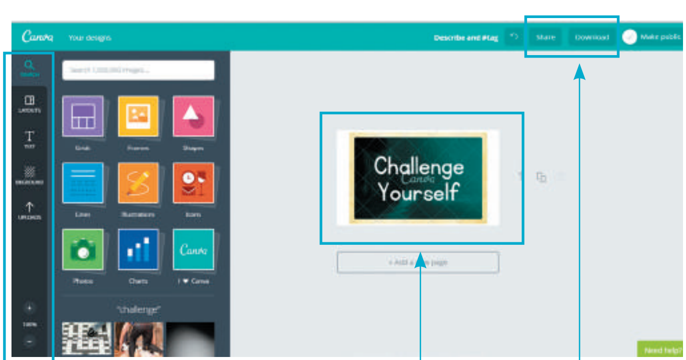
2 Reconoce el entorno de Canva

a. Barra de herramientas:

Buscar SEARCH; plantillas LAYOUTS; textos TEXT; fondos BKGROUND; subir imágenes UPLOADS.

b. Con el botón "Share" puedes compartir archivos y con "Download", descargarlos.

c. Zona de trabajo



3 Busca el contenido para el folleto

a. Escribe una breve explicación sobre las razones trigonométricas.

b. Busca en internet imágenes de situaciones en las que pueden utilizarse las razones trigonométricas para encontrar datos. Ten en cuenta los criterios de búsqueda explicados en la tabla de la derecha.

c. Elige las imágenes y guárdalas en una carpeta ya sea en el computador o en una memoria USB.

Criterio	Recomendación
Frases literales	Si necesitas encontrar una frase textual, debes escribirla entre comillas. Por ejemplo: "Razones trigonométricas".
Palabras clave	Escribe las palabras principales relacionadas con el tema.
Exclusión de términos	Puedes limitar la búsqueda añadiendo un guion (-) antes de los términos que no quieres que aparezcan en los resultados. Por ejemplo: funciones –teatro –cine; de esta forma, el buscador te presentará los resultados de *funciones* sin incluir aquellos que tengan que ver con cine o teatro.
Búsqueda avanzada	Los buscadores incluyen opciones para restringir la búsqueda. Por ejemplo: idioma, formato, tamaño, entre otros.
Ortografía	Las palabras bien escritas limitan los resultados de la búsqueda. Ten en cuenta que los sitios confiables se preocupan por respetar las normas ortográficas.

4 Crea un folleto en Canva

a. En la barra de herramientas, haz clic en LAYOUTS y elige una plantilla tipo “Free”.

b. Selecciona la opción UPLOADS y luego haz clic en Upload your own images.

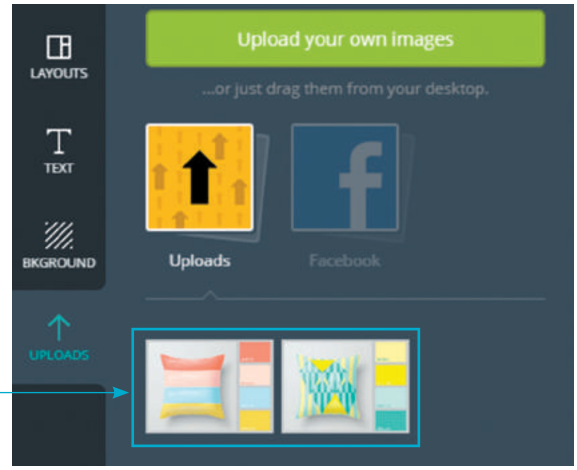
c. Ve a la carpeta que creaste anteriormente y elige las imágenes que incluirás en el folleto. Luego da clic en “Abrir”; Canva subirá las imágenes para que puedas disponer de ellas.

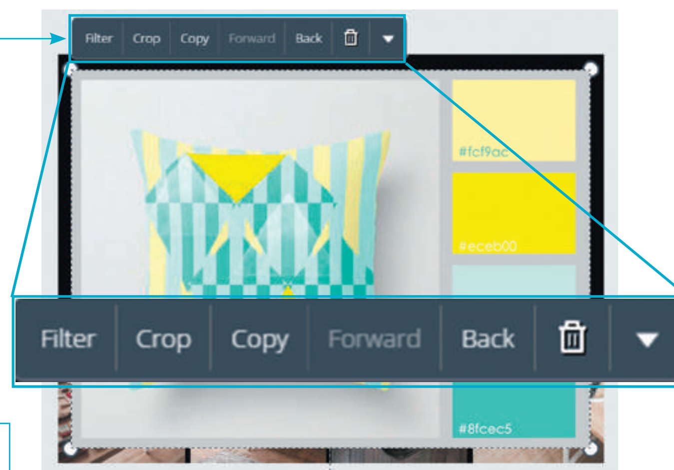
d. Haz clic en una imagen y automáticamente aparecerá en la zona de trabajo, arrástrala hasta el sitio que desees. Usa los botones emergentes para editarla: “Filter”, para aplicar otros filtros; “Crop”, para recortar la imagen; 🗑 para eliminarla, y ▼ para girarla de forma horizontal o vertical. Repite este proceso con cada una de las imágenes.

e. Sigue las instrucciones para editar los textos:

- Haz clic en una ventana de texto en la zona de trabajo, escribe un texto nuevo, por ejemplo: “Razones trigonométricas”.
- Cambia el tipo y tamaño de la letra usando Old Standard 42; el color, ⚪, y el estilo de la letra con ▼.

f. En caso de requerir más páginas, edítalas a partir de las acciones anteriores; de lo contrario, elimina los objetos y los textos de las páginas siguientes.







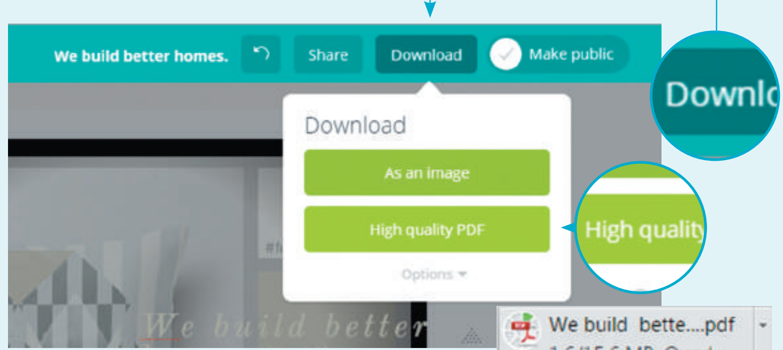
Aprende más

Descarga tu folleto:

Haz clic en el botón “Download” y selecciona la opción “High Quality PDF”.

a. Espera unos minutos mientras Canva crea y descarga el folleto en PDF.

b. Una vez finalizada la descarga, abre el archivo y observa cómo quedó tu folleto.



Evaluación de la unidad

Números relativos

Razonamiento

1. Completa la siguiente tabla con los números relativos que representen cada situación.

Situación	Número relativo
Carlos perdió 17 fichas de las que le habían prestado.	
El pez está a 50 metros bajo el nivel del mar.	
Mario ganó 22 puntos en el videojuego.	
Quedan 18 segundos antes de que despegue el avión.	
El pájaro se encuentra a 358 m de altura.	

Números enteros. Operaciones

Razonamiento

2. Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda.

a. -23 ___ $\mathbb{Z}^+$

b. 9 ___ $\mathbb{Z}^-$

c. 12 ___ $\mathbb{Z}^+$

d. -9 ___ $\mathbb{Z}^-$

e. -11 ___ $\mathbb{Z}^-$

f. 4 ___ $\mathbb{Z}^+$

g. -123 ___ $\mathbb{Z}^+$

h. 2 ___ $\mathbb{Z}^-$

3. Escribe la posición final de los siguientes movimientos realizados sobre una recta numérica.

a. Inicia en -5 y se desplaza 10 unidades a la derecha: ___

b. Inicia en 13 y se desplaza 19 unidades a la izquierda: ___

c. Inicia en 4, se desplaza 6 unidades a la izquierda y luego 15 unidades a la derecha: ___

d. Inicia en -21, se desplaza 32 unidades a la derecha y luego 9 unidades a la izquierda: ___

e. Inicia en -5, se desplaza 3 unidades a la izquierda y luego 4 unidades a la derecha: ___

Resolución de problemas

4. En la oficina, Jaime recorre 12 m a la izquierda de su puesto para ir a la fotocopiadora más cercana y 18 m a la derecha para ir a la sección de mensajería. Si Jaime va cinco veces en un día a la fotocopiadora y tres veces a la mensajería, ¿cuántos metros en total recorrió?

Ejercitación

5. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $5 + (-6) + 12 + (-5)$

b. $(-15) + 23 + (-8) + (-4)$

c. $(-1) + 3 + (-4) - (-13)$

d. $[(-13 - 14) - (-9 - 12)] + (-6)$

e. $[(19 - 20) + (14 - 15)] - [(-7 - 13) + 12]$

f. $\{[(3 - 4 + 7) - (9 - 6)] + (-20 + 9)\} - 10$

Razonamiento

6. Selecciona la respuesta a cada pregunta.

a. ¿Cuál es el número que sumado con 12 es igual a -4?

-16 | 16 | 8 | -8

b. ¿Cuál es el número que al restarle 14 da como resultado -22?

8 | -30 | -8 | 30

c. ¿A qué número hay que restarle -7 para obtener 17?

7 | -10 | -7 | 10

Resolución de problemas

7. De los 328 escalones que tiene un edificio, a Fernando le falta subir 79. ¿Cuántos escalones ha subido?

8. En la siguiente tabla se muestra la variación del nivel del agua del embalse La Esperanza de la provincia de Manabí en los últimos cinco meses.

Mes	1	2	3	4	5
Nivel del agua (m)	-10	19	-35	-9	7

a. Explica el significado del número -9 en esta situación.

b. ¿Entre qué meses se presentó la mayor variación del nivel del agua?

c. Si antes de tomar las muestras del nivel del agua, el embalse tenía una profundidad de 356 m, ¿cuál es el nivel del agua de la represa al final del quinto mes?

Indicadores de logro:

- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números enteros.
- Aplica las operaciones con números enteros en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números enteros.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.
- Resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z.

Ejercitación

9. Resuelve las siguientes operaciones con números enteros.

a. $8 \cdot (-6) \cdot (-7)$

b. $12 \cdot 4 \div (-2)$

c. $[(-225) \div 15] - (-85)$

d. $(-4) \cdot [(-6) \div 2]$

e. $[(-13 \cdot 14) \cdot (20 \div 10)]$

f. $[(5 \cdot 8) \div (2 \cdot 10)] \cdot [(18 \div (-6)]$

g. $\{[(-16) \cdot (-16)] \div (-8) \cdot (-8)\}$

10. Completa la tabla.

·	15	−16	−8	−1
−6				
4				
−12				
3				
−7				

Resolución de problemas

11. La temperatura de una ciudad a las 9:00 a.m. era de 26 °C. Si cada hora que pasa la temperatura aumenta 3 °C, ¿cuál es la temperatura de esta ciudad a las 2:00 p.m.?

12. El camión de Alejandro tiene una capacidad para almacenar 300 cajas. Si en cada caja se empacan 48 bolsas y hay un total de 16 800 bolsas, ¿es posible acomodar todas las bolsas en el camión?

13. Un ciclista baja una peña a una velocidad de 60 metros por segundo. Si conserva la misma velocidad de descenso, ¿cuántos metros habrá descendido en 78 segundos?

14. Un submarino asciende hacia la superficie a una velocidad de 200 metros por minuto. Si el submarino se encuentra a 5 km de profundidad, ¿cuánto tiempo tardará en subir a la superficie?

15. Un estanque se desocupa a razón de 3 litros por hora. Dentro de 6 horas, ¿cuántos litros menos contendrá el estanque?

Razonamiento

16. Relaciona cada potencia indicada con su respectivo resultado.

a. $(-3)^3$	( ) −343
b. $(-4)^4$	( ) 625
c. 8^3	( ) −32
d. $(-2)^5$	( ) 512
e. $(5^2)^2$	( ) −216
f. $(-7)^3$	( ) 64
g. $(-6)^3$	( ) 256
h. $[(-2)^2]^3$	( ) −27

17. Selecciona, en cada caso, la raíz correspondiente a las operaciones dadas.

a. $\sqrt[3]{(-27) \cdot 64}$

−12 | 12 | 7

b. $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$

−10 | 10 | 8

c. $\sqrt{64 \div 16}$

2 | −2 | 4

d. $\sqrt[4]{(-2)^4}$

1 | −2 | 2

e. $\sqrt[3]{-729}$

−729 | −9 | −27

Ecuaciones e inecuaciones

Ejercitación

18. Resuelve.

a. $x + 12 = 21$

b. $y - 4 > 16$

c. $\frac{x}{2} = 140$

d. $5y < 65$

2 Números racionales

BLOQUE

Álgebra y Funciones

Gran cantidad de la información que se suministra en la radio, la televisión, los periódicos o la internet incluye datos numéricos que se expresan con fracciones, con decimales o con porcentajes. Tales expresiones corresponden a las distintas formas de expresar un número racional.

- Enuncia algunas situaciones de la vida cotidiana en las cuales se empleen las fracciones, los decimales y los porcentajes.



Cultura del Buen Vivir

La confianza

La confianza es la seguridad que alguien tiene en sí mismo, en otra persona o en algo.

- La falta de un sistema de medidas estándar en la antigüedad provocó diversos inconvenientes en las relaciones comerciales. ¿Cómo crees que la confianza habría permitido aminorar estas dificultades?

Aprenderás...

- Números racionales y sus operaciones
- Representación de números racionales en la recta numérica
- Relaciones de orden
- Ecuaciones con números racionales

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

El origen del metro y la confianza en la matemática

A través de la historia, medir ha sido una necesidad de la sociedad. Por esta razón, se han adoptado diversos patrones de medida para la longitud, el peso, la unidad de tiempo, el volumen, etc. Inicialmente, el hombre utilizó las dimensiones del cuerpo para definir patrones de medidas de longitud, entre ellos el pie, el palmo, la brazada y demás. Con el paso de los años se empezaron a utilizar herramientas para medir; prueba de ello son el uso de barras y palos en la Edad Media. Sin embargo, las medidas variaban entre los lugares, e incluso entre los habitantes de la misma ciudad. Es así que en Francia, en el siglo XVIII, existían más de 700 diferentes medidas de longitud, todas carentes de objetividad debido a que se definían de manera muy local. Esto, en Europa, acarreó grandes dificultades, ya que proliferaban intercambios culturales y comerciales, los cuales se veían entorpecidos debido a la falta de unificación de diversos sistemas de medidas que solían ser motivo de disputa entre los mercaderes y habitantes de las ciudades, amenazando la estabilidad social y económica. Por esta razón se vio la necesidad de crear un sistema de medida estándar.

El gobierno francés, a finales del siglo XVIII, tomó la decisión de crear un sistema de medidas que permitiera unificar a todos los habitantes. Lo sorprendente de esta decisión era que dicha medida no debía ser basada en juicios arbitrarios pasajeros. Entonces, decidieron crearla basándose en la naturaleza. Esta labor se convirtió en un proyecto científico totalmente patrocinado por el gobierno de una nación. De este modo, se decidió definir el metro como la diezmillonésima parte de la longitud de un cuadrante del meridiano que atraviesa París.

Adaptado de: Estrada H., Ruiz J. y Triana J. (consultado en Noviembre 2015). Educación e Historia. Colombia: Revista U. del Valle.

Actividades

Interpreta

1. Explica el significado de la expresión "diezmillonésima parte".

Argumenta

2. ¿Consideras útiles los números naturales para expresar el resultado de una medición? Explica.
3. ¿Qué beneficios aporta a la humanidad el establecimiento de un sistema internacional de medidas?

Propón

4. Mide el largo de tu salón con la mano, expresa esta medida con un número y compara tu medida con la de otro compañero.

1 Números racionales

Explora

Dos buses escolares transportan cada uno 24 estudiantes. En el primero, $\frac{1}{4}$ de los pasajeros son niñas y en el segundo, $\frac{3}{12}$ lo son.

- ¿Qué se puede afirmar con respecto a la cantidad de niñas que se transportan en cada bus?

1.1 Fracciones equivalentes y fracciones irreducibles

Si en cada bus se hacen grupos de tal forma que en cada grupo haya el mismo número de estudiantes del mismo género, en el primero se pueden constituir cuatro grupos con seis estudiantes, en uno de los cuales solamente habrá niñas; entretanto, en el segundo grupo se pueden hacer doce grupos con dos estudiantes y en tres de ellos habrá solo niñas, para un total de seis niñas. Por consiguiente, ambos buses transportan la misma cantidad de niñas.



$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Figura 1

Se denominan **fracciones equivalentes** aquellas fracciones que representan la misma cantidad o parte del todo. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo 1

Al simplificar la fracción $\frac{9}{27}$ se obtiene $\frac{1}{3}$, que es equivalente a la primera fracción.

Es decir, $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Se denominan **fracciones irreducibles** aquellas fracciones en las que el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1; o, de otra forma, aquellas que están simplificadas al máximo.

Ejemplo 2

Para escribir fracciones irreducibles a $\frac{30}{45}$ y $\frac{48}{72}$, se halla el máximo común divisor del numerador y del denominador en cada caso.

Como m. c. d. (30, 45) = 15, entonces $\frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$.

Como m. c. d. (48, 72) = 24, entonces $\frac{48 \div 24}{72 \div 24} = \frac{2}{3}$.

Observa que en ambos casos se ha obtenido la misma fracción irreducible, así que $\frac{30}{45} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

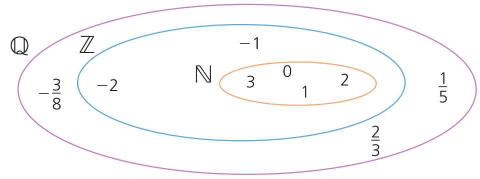
Ten en cuenta

- Para simplificar una fracción, se dividen tanto el numerador como el denominador por un divisor común a ambos.
- Cuando para simplificar se elige justo el máximo común divisor, la fracción que se obtiene es irreducible.

1.2 El conjunto de los números racionales

Un **número racional** es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Se toma como representante de este número la fracción irreducible.

El **conjunto de los números racionales** ($\mathbb{Q}$) está formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, en donde a y b son números enteros y b es diferente de 0. Este conjunto contiene a los números enteros que, a su vez, contiene a los naturales, tal como se muestra en la Figura 2.



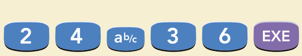
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Figura 2

En la calculadora

Simplificar fracciones

Para simplificar $\frac{24}{36}$ usando la calculadora, sigue esta secuencia.



- Simplifica las fracciones $\frac{54}{108}$ y $\frac{18}{54}$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.

Para determinar el signo de un número racional, basta con observar los signos del numerador y del denominador: si son iguales, el racional es positivo; si no lo son, el racional es negativo.

Ejemplo 3

Los números racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{-8}{-13}$ son positivos, ya que tanto el numerador como el denominador tienen el mismo signo. En este caso, el racional $\frac{-8}{-13}$ se puede escribir simplemente como $\frac{8}{13}$.

Por su parte, los números racionales $\frac{7}{-15}$ y $\frac{-1}{3}$ son negativos, pues el numerador y el denominador tienen signos distintos. Estos racionales se pueden escribir como $-\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{3}$, respectivamente.

Ten en cuenta

Para saber si un racional es positivo o negativo, se aplica la ley de los signos.

$$\frac{(+)}{(+)} = + \qquad \frac{(-)}{(-)} = +$$

$$\frac{(+)}{(-)} = - \qquad \frac{(-)}{(+)} = -$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Leonardo consume $\frac{12}{4}$ de litro de agua a la semana. ¿Cuánta agua consume en un mes?

Solución:

Para averiguar la cantidad de litros de agua que consume Leonardo en una semana, primero se realiza la simplificación de la fracción $\frac{12}{4}$.

$$\frac{12}{4} = \frac{12 \div 4}{4 \div 4} = \frac{3}{1} = 3$$

Entonces, Leonardo consume tres litros de agua a la semana y $4 \cdot 3 = 12$ litros de agua al mes.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe cada expresión como un número racional.

a. El numerador es el doble del denominador, que es 4.

b. El denominador es el triple del numerador disminuido en 2 y el numerador es el menor múltiplo de 5 diferente de 0.

c. El numerador es cuatro veces menor que el denominador, que corresponde al resultado de $8 \cdot 2$.

d. El denominador es la quinta parte de 25 y el numerador es el mínimo común múltiplo de 3 y 4.

e. El numerador es el cociente de dividir 8 entre 2, y su denominador es el primer múltiplo de 6 diferente de 0.

Ejercitación

3 Escribe tres números racionales equivalentes a cada racional dado.

a. $\frac{2}{5}$ b. $-\frac{1}{7}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{9}{5}$ e. $-\frac{3}{2}$

4 Halla la fracción irreducible equivalente a cada número racional.

a. $\frac{24}{48}$ b. $-\frac{18}{9}$ c. $\frac{16}{48}$ d. $\frac{3}{9}$ e. $-\frac{12}{36}$

Razonamiento

5 Clasifica cada número racional como positivo o negativo.

a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{0}{-9}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{1}{7}$ e. $\frac{-5}{6}$

6 Identifica el número racional que no pertenece a cada conjunto de fracciones equivalentes.

a. $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{5}{20}, \frac{4}{16}, \frac{5}{15}\right\}$

b. $\left\{\frac{12}{2}, \frac{24}{4}, \frac{36}{6}, \frac{46}{9}, \frac{60}{10}, \frac{72}{12}\right\}$

7 Completa cada equivalencia.

a. $-\frac{4}{6} = -\frac{32}{\square}$ b. $-\frac{12}{11} = -\frac{\square}{44}$

Resolución de problemas

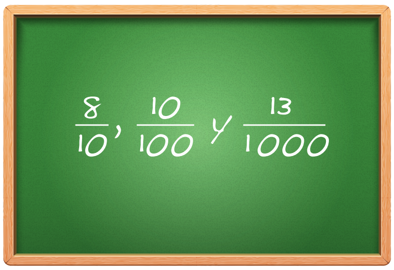
8 Un quinto de los 125 espectadores de una película salieron satisfechos. ¿Cuántos no salieron satisfechos?

9 En un hospital se atienden diariamente doce personas de la tercera edad por cada cuatro niños. ¿Cuántas personas de la tercera edad fueron atendidas en el mes, si durante ese tiempo se atendieron 120 niños?

2 Expresión decimal de los números racionales

Explora

La profesora Andrea escribió en el tablero las siguientes expresiones:



- ¿Qué características tienen en común esas fracciones?

Al observar las cantidades que escribió la profesora, se puede ver que cada denominador es una potencia de 10; es decir, son **fracciones decimales.**

Cuando se efectúan los cocientes indicados en cada caso, se obtiene 0,8 ; 0,1 y 0,013, los cuales se conocen como decimales exactos.

2.1 Números decimales exactos

Un **número decimal exacto** es aquel que tiene una cantidad finita de cifras decimales y corresponden a fracciones decimales o a fracciones equivalentes a una fracción decimal.

Ejemplo 1

A partir de las fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{45}{1\,000}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se obtienen los decimales exactos 0,1; 0,045; 0,4 y 0,4375, en su orden.

Observa que $\frac{1}{10}$ y $\frac{45}{1\,000}$ tienen como denominador una potencia de 10, mientras que $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se pueden amplificar por 2 y por 625, respectivamente, para obtener las fracciones decimales $\frac{4}{10}$ y $\frac{4\,375}{10\,000}$.

2.2 Números decimales periódicos

Un **número decimal periódico** es un número racional caracterizado por tener un **periodo** (cifras decimales que se repiten indefinidamente). Este periodo puede constar de una o varias cifras.

Ejemplo 2

El número racional $\frac{13}{3}$ es equivalente a un decimal en el que la cifra 3 se repite de manera indefinida. Para notar ese hecho se ubica un arco encima de dicha cifra.

$$\frac{13}{3} = 13 \div 3 = 4{,}3333... = 4{,}\widehat{3}$$

Ejemplo 3

Los números decimales $0{,}\widehat{1314}$; $0{,}2\widehat{7}$ son periódicos. En el primero se repiten las cifras 1314 y en el segundo, el número 7.

Los números **decimales periódicos puros** son aquellos que presentan el periodo inmediatamente después de la coma, en tanto que en los **periódicos mixtos** el periodo no aparece inmediatamente después de esta.

Ejemplo 4

El número decimal $4{,}\widehat{8}$ es puro y su periodo es 8, mientras que $3{,}4\widehat{672}$ es mixto, pues su periodo, que es 672, no aparece inmediatamente después de la coma. En este número la cifra decimal 4 que no se repite se denomina **anteperiodo**.

La Figura 1 resume la clasificación de los números racionales en su expresión decimal.

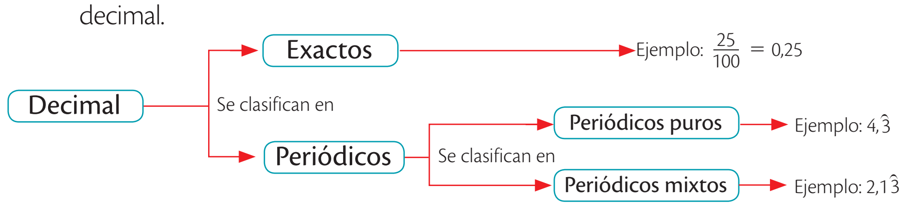


Figura 1

Ten en cuenta

Un número mixto está formado por un número entero y un número racional, por ejemplo: $2\frac{3}{5}$ o $-4\frac{1}{7}$.

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Para cocinar una torta, María utilizará los ingredientes que se mencionan abajo. ¿Cuál bolsa contiene cada ingrediente?

a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilogramo **b.** Sal: $\frac{4}{10}$ de kilogramo

c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilogramo **d.** Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilogramo

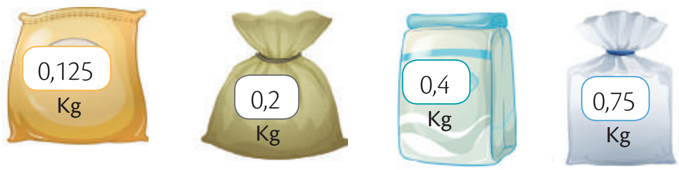


Figura 2

Solución:

Se toma la fracción que indica la cantidad de cada ingrediente y se efectúa la división que corresponde para hallar su expresión decimal.

a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilogramo $= 3 \div 4 = 0{,}75$ kilogramos

b. Sal: $\frac{4}{10}$ de kilogramo $= 4 \div 10 = 0{,}4$ kilogramos

c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilogramo $= 1 \div 8 = 0{,}125$ kilogramos

d. Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilogramo $= 1 \div 5 = 0{,}2$ kilogramos

Así, la harina está en la última bolsa, la sal en la tercera, la mantequilla en la primera y el azúcar en la segunda.

Cálculo mental

Denominador 9, 99, 999, 9 999...

Si el denominador de una fracción está compuesto por nueves, el número decimal correspondiente es periódico y su periodo tiene tantas cifras como nueves hay en el denominador.

$\frac{2}{9} = 0{,}\widehat{2}$ $\frac{32}{999} = 0{,}\widehat{032}$

- Expresa como número decimal los números racionales $\frac{12}{99}$ y $\frac{25}{999}$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los siguientes números racionales.

a. $\frac{13}{5}$ b. $-\frac{13}{5}$ c. $\frac{5}{11}$

d. $-\frac{8}{12}$ e. $-\frac{63}{7}$ f. $\frac{11}{9}$

g. $-\frac{5}{10}$ h. $\frac{43}{1\,000}$ i. $\frac{121}{10}$

j. $-\frac{723}{100}$ k. $\frac{472}{100}$ l. $\frac{639}{1\,000}$

Razonamiento

3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. La expresión decimal de $\frac{150}{10}$ es 1,5. ( )

b. $-3{,}45$ es la expresión decimal de $-\frac{345}{100}$. ( )

c. $-\frac{32}{100}$ es equivalente a $-3{,}2$. ( )

d. 45,6 es la expresión decimal de $\frac{456}{10}$. ( )

Comunicación

4 Relaciona cada fracción con su expresión decimal.

a. $\frac{1}{4}$	2
b. $\frac{8}{4}$	$0{,}1\widehat{6}$
c. $\frac{1}{6}$	0,25

Resolución de problemas

5 Andrea, Natalia, Juan, Carlos y Fernanda desean ingresar a la "Casa encantada", a la cual pueden ingresar personas con al menos 1,60 metros de estatura.

Decide cuáles de ellos pueden ingresar si sus estaturas son:

Andrea $\frac{3}{2}$ de metro, Natalia $\frac{5}{3}$ de metro, Juan $\frac{4}{2}$ de metro, Carlos $\frac{4}{3}$ de metro y Fernanda $\frac{9}{5}$ de metro.

3 Fracción correspondiente a una expresión decimal

Si en el recipiente se vierte agua hasta la marca 0,5, se habrá ocupado la mitad de su capacidad; así que $\frac{1}{2} = 0,5$.

Cuando se divide 1 entre 2, se obtiene 0,5. Por tanto, se dice que la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente al número decimal 0,5.

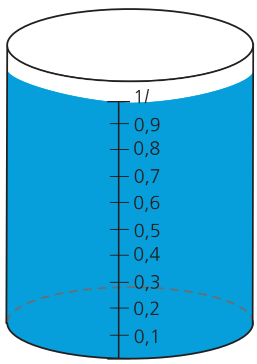


Figura 1

La **fracción generatriz** de un número decimal es una fracción en la que al dividir el numerador entre el denominador arroja como cociente ese número.

3.1 Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

La **fracción generatriz** de un **decimal exacto** tiene como numerador el número sin decimales y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

Una vez obtenida la fracción generatriz, se simplifica si es posible.

Ejemplo 1

Para hallar la fracción generatriz de 0,345 se sigue este procedimiento:

1. Se escribe el número sin decimales en el numerador.

$$0,345 = \frac{345}{\square}$$

2. Se escribe en el denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada (en este caso, 3).

$$0,345 = \frac{345}{1\,000}$$

3. Se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

$$0,345 = \frac{345}{1\,000} = \frac{69}{200}$$

Entonces, la fracción generatriz de la expresión decimal 0,345 es $\frac{69}{200}$.

Ejemplo 2

Para hallar la fracción generatriz de 43,78 se procede así:

1. Se escribe como numerador la expresión dada pero sin coma.

$$43,78 = \frac{4\,378}{\square}$$

2. Se escribe como denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada.

$$43,78 = \frac{4\,378}{100}$$

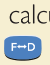
3. Se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

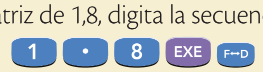
$$43,78 = \frac{4\,378}{100} = \frac{2\,189}{50}$$

Así, la fracción generatriz de la expresión decimal 43,78 es $\frac{2\,189}{50}$.

En la calculadora

Fracción generatriz de un número decimal

En la calculadora puedes utilizar la tecla  para calcular fracciones generatrices. Si quieres hallar la fracción generatriz de 1,8, digita la secuencia:



- Comprueba con la calculadora los resultados obtenidos en los ejemplos 1 y 2.

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

3.2 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La **fracción generatriz** de un **decimal periódico puro** cuya parte entera es 0, es una fracción que tiene como numerador el mismo periodo y como denominador tantos nueves como cifras decimales tiene el periodo.

Ejemplo 3

Para hallar la fracción generatriz del decimal puro $0,\widehat{25}$ se procede así:

1. Como la parte entera del decimal es 0, se escribe en el numerador el periodo del decimal.

$$0,\widehat{25} = \frac{25}{\square}$$

2. Se escriben tantos nueves en el denominador como cifras tiene el periodo.

$$0,\widehat{25} = \frac{25}{99}$$

Por tanto, la fracción generatriz de $0,\widehat{25}$ es $\frac{25}{99}$.

Ejemplo 4

Para determinar la fracción generatriz de $4,\widehat{15}$ se siguen estos pasos:

1. Se escribe el número como la suma de la parte entera más la parte decimal.

$$4,\widehat{15} = 4 + 0,\widehat{15}$$

2. Se halla la fracción que corresponde a la parte decimal.

$$0,\widehat{15} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

3. Se escribe el número mixto correspondiente y se expresa como una fracción impropia.

$$4 + \frac{5}{33} = 4\frac{5}{33} = \frac{137}{33}$$

Así, la fracción generatriz del número decimal $4,\widehat{15}$ es $\frac{137}{33}$.

3.3 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

La **fracción generatriz** de un **decimal periódico mixto** tiene como numerador las cifras hasta completar un periodo, menos las cifras hasta el anteperiodo, y como denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

Ejemplo 5

Observa cómo se halla la fracción generatriz de $8,4\widehat{13}$.

$$8,4\widehat{13} = \frac{8\,413 - 84}{990} = \frac{8\,329}{990}$$

Por consiguiente, la fracción generatriz del número $8,4\widehat{13}$ es $\frac{8\,329}{990}$.

Ten en cuenta

Para expresar un número mixto como fracción, aplica los siguientes pasos:

a. Multiplica el número entero por el denominador.

b. Al resultado anterior, súmale el numerador.

c. Construye la fracción escribiendo el resultado anterior como numerador y deja el mismo denominador.

Ejemplo: $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

CULTURA del Buen Vivir

La confianza

En matemáticas es importante confiar en los algoritmos establecidos a través del tiempo para resolver diversos problemas, por ejemplo, para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal. Así como debes confiar en tales operaciones, debes confiar en las normas o reglas que se han mantenido a través de los años en nuestra comunidad, colegio, ciudad o país.

- ¿En tu diario vivir, qué reglas o normas has asumido con total confianza para conservar una sana convivencia?

3 Fracción correspondiente a una expresión decimal

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Relaciona cada número decimal con la fracción generatriz que le corresponde.

a. 0,55	b. 2,38	c. $1,\overset{\frown}{45}$	d. $0,\overset{\frown}{39}$
( ) $\frac{13}{33}$	( ) $\frac{119}{50}$	( ) $\frac{11}{20}$	( ) $\frac{16}{11}$

Solución:

a. 0,55	b. 2,38	c. $1,\overset{\frown}{45}$	d. $0,\overset{\frown}{39}$
(d) $\frac{13}{33}$	(b) $\frac{119}{50}$	(a) $\frac{11}{20}$	(c) $\frac{16}{11}$

MatemaTICS

Halla expresiones decimales con la calculadora científica

Cuando se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de un número racional, es necesario tener presente que esta mostrará una cantidad determinada de dígitos después de la coma (esto depende del modelo de la calculadora).

Para hallar la expresión decimal del número racional $\frac{1}{11}$, se digita la secuencia:

1 ÷ 1 1 EXE

El resultado con diez cifras decimales aparece en la pantalla así:

1÷11
0.0909090909

El periodo en este caso es 09, así que la forma de expresar el número decimal es $0,\overset{\frown}{09}$.

Para convertir $-\frac{12}{11}$ a expresión decimal, se digita:

− 1 2 ÷ 1 1 EXE

El resultado que muestra la calculadora en la pantalla es:

-12÷11
-1.090909091

Como se observa, aparece el número 1 al final. Esto no significa que el periodo ha cambiado, sino que la calculadora ha redondeado el valor. Por tanto, la forma de expresarlo es $-1,\overset{\frown}{09}$.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Explica qué entiendes por periodo en los números decimales. Escribe cinco ejemplos.

3 Explica qué es una fracción generatriz. Escribe tres ejemplos.

4 Señala la diferencia entre números decimales puros y números decimales mixtos.

Ejercitación

5 Clasifica las siguientes expresiones decimales y determina la fracción generatriz correspondiente.

a. $33,\overset{\frown}{02}$	b. $1,\overset{\frown}{001}$	c. 0,324
d. 329,923	e. $4,\overset{\frown}{4}$	f. 23,010
g. $-0,\overset{\frown}{39}$	h. 0,963	i. $0,\overset{\frown}{9}$
j. 12,02	k. $28,\overset{\frown}{1}$	l. 17,52

6 Halla la fracción generatriz de cada una de las expresiones decimales.

a. 3,04; 3,004; 3,044 y 3,0404

b. 969,0069; 696,096 y 699,06

c. 123,663; 123,6663; 123,66663

d. $32,\overset{\frown}{1123}$; $32,11\overset{\frown}{23}$; $32,1\overset{\frown}{123}$

e. $10,\overset{\frown}{101}$; 10,101; $10,10\overset{\frown}{1}$

7 Indica si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. La fracción generatriz de $3,\overset{\frown}{4}$ es $\frac{3}{4}$. ( )

b. $\frac{183}{25}$ es la fracción generatriz de 7,32. ( )

c. La fracción generatriz de $-7,\overset{\frown}{27}$ es $\frac{727}{100}$. ( )

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Razonamiento

8 Halla la fracción generatriz del número decimal 0,5 y luego fracciones equivalentes a esta que satisfagan la condición enunciada en cada caso.

a. Una cuyo denominador sea 8.

b. Una que tenga como numerador el número 15.

c. Una cuyo numerador sea 36.

d. Una que tenga un número primo como numerador.

e. Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 120.

9 Halla la fracción generatriz del número decimal 0,75. Luego, escribe fracciones equivalentes a esta que cumplan las condiciones que se citan en cada caso.

a. Una cuyo numerador y denominador sean negativos.

b. Una con numerador 9.

c. Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 14.

d. Una cuyo denominador sea una potencia de 10.

e. Una que tenga como denominador el número 28.

10 Determina si los siguientes números son iguales o no. Justifica tus respuestas.

a. $66,\overset{\frown}{196}$ y $66,1\overset{\frown}{96}$

b. $3,1\overset{\frown}{47}$ y $3,1\overset{\frown}{474}$

c. $21,1\overset{\frown}{21}$ y $21,1\overset{\frown}{2121}$

d. $5,3\overset{\frown}{2}$ y $5,3\overset{\frown}{22}$

e. $4,1\overset{\frown}{8}$ y $4,\overset{\frown}{18}$

Modelación

11 Colorea el cuadrado de la Figura 2 como se indica.

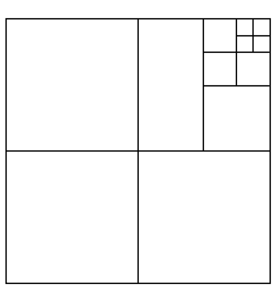


Figura 2

a. Con azul 0,5 del cuadrado.

b. Con verde 0,125 del cuadrado.

c. Con amarillo 0,046875 del cuadrado.

d. Con morado 0,0625 del cuadrado.

e. Con rojo 0,25 del cuadrado.

12 Colorea el círculo de la Figura 3 según las indica ciones.

a. $0,\overset{\frown}{3}$ con azul

b. $0,1\overset{\frown}{6}$ con verde

c. $0,08\overset{\frown}{3}$ con amarillo

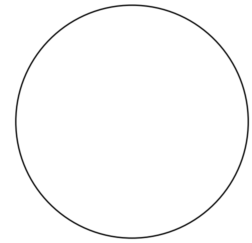


Figura 3

13 Estima la fracción del círculo que quedó sin colorear en la actividad anterior y escríbela en su expresión decimal.

14 Observa en la Figura 4 cómo Mario coloreó con azul dos de las tres partes en las que dividió un círculo. ¿Se puede afirmar que él coloreó aproximadamente $0,\overset{\frown}{6}$ del círculo?

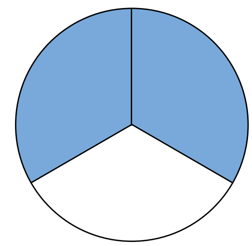


Figura 4

Resolución de problemas

15 Un análisis químico indicó que $\frac{4}{7}$ mL de una sustancia era gasolina, mientras que un segundo estudio concluyó que 0,572 mL de la sustancia correspondía a ese combustible. ¿Cuál de los dos análisis mostró mayor cantidad de gasolina? Justifica tu respuesta.

16 $\frac{3}{7}$ de los estudiantes del curso 7A son hombres y en 7B la expresión decimal de los estudiantes de ese género es 0,4. Si ambos cursos tienen la misma cantidad de estudiantes, ¿cuál curso tiene más hombres? Justifica tu respuesta.

17 Un libro de ciencias indica que $\frac{7}{10}$ de la superficie de la Tierra está cubierta por agua, mientras que en una enciclopedia se lee que 0,71 del planeta está cubierto por ese líquido. Según estudios oficiales, el 70 % del planeta está cubierto por agua. Con base en la información de los estudios oficiales, indica cuál de los dos textos (el de ciencias o la enciclopedia) brinda la información más cercana a la realidad.



SM Ediciones

4 Números racionales en la recta numérica

Explora

En la Figura 1 se observa el peso de cinco costales



Figura 1

- ¿Cómo podría representarse en la recta numérica el peso de cada costal?

Para representar el peso de cada costal en la recta numérica, primero se debe expresar cada peso en fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \qquad \frac{13}{4} = \frac{26}{8} \qquad \frac{21}{4} = \frac{42}{8} \qquad \frac{26}{4} = \frac{52}{8}$$

Posteriormente, se divide cada unidad de la recta según lo que indica el denominador (ocho partes iguales) y se toman tantas partes como indique el numerador. La representación de los pesos en la recta numérica se observa en la Figura 2.

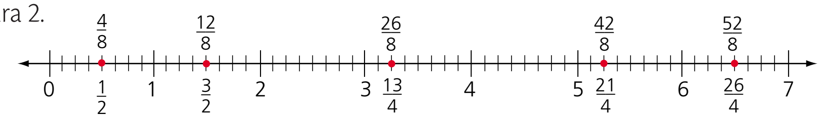


Figura 2

Ten en cuenta

Al representar un número racional dado (en su forma fraccionaria) en la recta numérica, cada unidad debe dividirse en tantas partes iguales como indique el denominador.

Los números racionales se ubican en la **recta numérica** tanto a la izquierda como a la derecha del 0. A la derecha se hallan los racionales positivos y a la izquierda los racionales negativos.

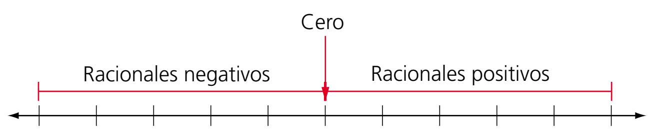


Figura 3

Ejemplo 1

Si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tenga como denominador 2. En la recta numérica de la Figura 4 se observa la representación de los números racionales $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$.

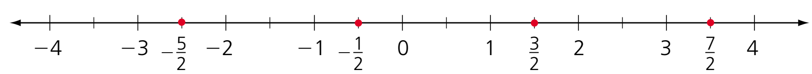


Figura 4

Ejemplo 2

De igual manera, si se divide en cuatro partes iguales cada segmento unidad en la recta, se pueden ubicar los números racionales cuya representación fraccionaria tenga como denominador 4. Observa cómo se ha ubicado $-\frac{3}{4}$ sobre la recta numérica de la Figura 5.

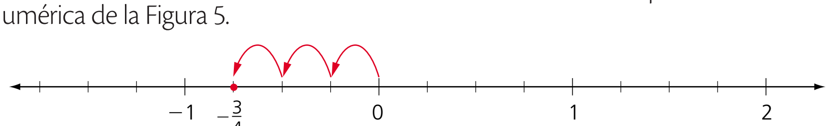


Figura 5

También se pueden representar los números racionales en la recta numérica considerando su expresión decimal y ubicando estos decimales en forma aproximada en la recta.

Ejemplo 3

Para representar los racionales $\frac{7}{9}$, $\frac{34}{15}$, $-\frac{9}{7}$ y $-\frac{17}{5}$, se pueden hallar sus expresiones decimales ($0,\overset{\frown}{7}$; $2,2\overset{\frown}{6}$; $-1,\overset{\frown}{285714}$ y $-3,4$, respectivamente) y ubicar de manera aproximada cada punto sobre la recta (Figura 6).

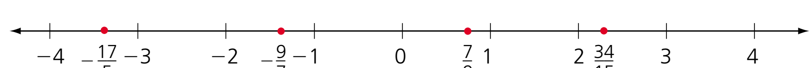


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales en la recta numérica.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Relaciona cada punto de la recta numérica de la Figura 7 con el número racional que le corresponde.

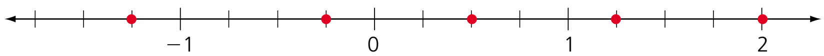


Figura 7

a. $\frac{2}{1}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $1\frac{1}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-1\frac{1}{4}$

Solución:

En este caso, conviene expresar cada número racional con una fracción cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores.

a. $\frac{8}{4}$ b. $\frac{2}{4}$ c. $\frac{5}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-\frac{5}{4}$

Luego, se ubican los puntos correspondientes a cada número racional tal como se muestra en la Figura 8.

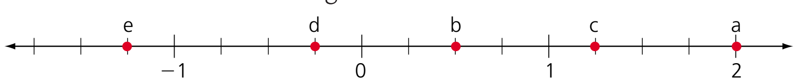


Figura 8

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

TIC

https://es.khanacademy.org/math/arithmetic/fractions/mixed_numbers/e/fractions_on_the_number_line_3

Representa números racionales en la recta numérica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa en la recta numérica cada número racional.

a. $\frac{3}{5}$ b. $-\frac{4}{2}$ c. $-\frac{6}{4}$

d. $\frac{7}{3}$ e. $\frac{2}{8}$ f. $-\frac{3}{7}$

Razonamiento

3 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. El número racional $-\frac{11}{3}$ se ubica en la recta entre -3 y -4. V

b. En la recta, el número racional $\frac{27}{9}$ coincide con el número 3. V

c. El número mixto $8\frac{4}{7}$ se ubica en la recta entre 8 y 9. V

d. El número racional $-\frac{13}{5}$ se ubica en la recta a la derecha de -2. F

e. En la recta, el número racional $\frac{24}{6}$ coincide con el número -4. F

f. En la recta, el número racional $\frac{8}{2}$ coincide con el número 5. F

g. El número racional $-\frac{11}{5}$ se ubica en la recta entre -1 y -2. F

4 Encierra con un círculo azul los números que se ubican en la recta numérica a la derecha del 0 y con un círculo verde, los que se sitúan a su izquierda.

a. $-\frac{13}{10}$ b. $\frac{5}{10}$ c. $\frac{3}{9}$

d. $-\frac{9}{3}$ e. $-\frac{7}{35}$ f. $\frac{23}{7}$

Resolución de problemas

5 Para facilitar la ubicación de las pesas del laboratorio, se ha decidido organizarlas de la más pesada a la más liviana.



SM Ediciones

Figura 9

a. Representa en una recta numérica los pesos indicados en la Figura 9.

b. Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los pesos.

c. Expresa en gramos cada uno de los pesos, sabiendo que 1 kilogramo equivale a 1 000 gramos.

5 Relación de orden en los números racionales

Explora

El profesor Camilo preguntó a sus 32 estudiantes acerca de su deporte favorito y anotó la fracción de los que eligieron cada deporte en la Tabla 1.

Deporte	Fracción
Fútbol	$\frac{4}{16}$
Natación	$\frac{3}{8}$
Tenis	$\frac{1}{4}$
Béisbol	$\frac{4}{32}$

Tabla 1

- ¿Cuál es el orden de popularidad de los deportes?

Para responder la pregunta, se puede construir una recta numérica como la de la Figura 1 y ubicar en ella cada fracción. El orden de mayor a menor preferencia corresponde a las fracciones ubicadas de derecha a izquierda.



Figura 1

De acuerdo con el criterio indicado, el orden de los deportes desde el de mayor aceptación al menos popular es: primero natación, luego tenis y fútbol (con el mismo grado de aceptación), y por último, béisbol.

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se verifica una y solo una de las siguientes relaciones: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Para comparar dos números racionales, se deben tener en cuenta varios criterios:

- Todo número racional positivo es mayor que cualquier racional negativo.
- Todo número racional negativo es menor que 0.
- Si dos números racionales positivos tienen igual denominador, es menor el que tiene menor numerador.

  Por ejemplo: $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$
- Si dos números racionales positivos tienen el mismo numerador, es menor el que tiene mayor denominador.

  Por ejemplo: $\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$
- Si dos números racionales tienen distinto denominador, se debe buscar una fracción equivalente a cada una de las fracciones dadas, con el mismo denominador, y compararlas teniendo en cuenta los criterios anteriores.

Ejemplo 1

Para comparar los números racionales $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{9}$ se pueden seguir estos pasos:

- Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores; esto es, 90.
- Se amplifican las fracciones para expresarlas con denominador 90.

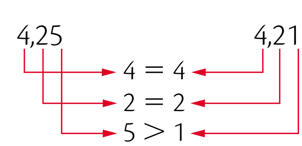
$$\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 9}{10 \cdot 9} = \frac{27}{90} \text{ y } \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{10}{90}$$

$$\text{Como } \frac{10}{90} < \frac{27}{90}, \text{ entonces } \frac{1}{9} < \frac{3}{10}.$$

Si se quiere comparar dos números racionales escritos en su forma decimal, se pueden hallar sus fracciones generatrices y proceder a compararlas de acuerdo con alguno de los criterios mencionados. También se pueden ubicar sobre la recta numérica, o bien, se pueden comparar sus partes enteras y decimales hasta donde difieran.

Ejemplo 2

Para comparar las expresiones decimales 4,25 y 4,21, se comparan sus cifras de izquierda a derecha hasta donde sea necesario.



Por lo tanto, 4,25 > 4,21

Ten en cuenta

$\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, ya que $\frac{3}{5}$ está a la izquierda de $\frac{4}{5}$; pero $-\frac{3}{5} > -\frac{4}{5}$ porque $-\frac{3}{5}$ está a la derecha de $-\frac{4}{5}$.

De manera análoga:

$\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$, pero $-\frac{3}{7} > -\frac{3}{4}$.

En resumen: al comparar dos números racionales, el menor es el que está a la izquierda del otro, cuando se los ubica en la recta numérica.

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en el conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 En una competencia de patinaje, los tres competidores que se disputaban el paso a la final registraron los siguientes tiempos: Juan $\frac{3}{4}$ de hora, Camilo $\frac{1}{2}$ de hora y Fernando $\frac{8}{15}$ de hora. ¿Cuál de los tres llegó en primer lugar?


SM Ediciones

Solución:

Para resolver el problema, se amplifican las fracciones correspondientes a los tiempos de los competidores para obtener fracciones homogéneas con denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores que es 60.

Así, $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$; $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \frac{30}{60}$; $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}$.

Luego, se escoge la menor de todas las fracciones obtenidas, que es $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, ya que corresponde al menor de los tiempos. De esta forma, Camilo fue quien llegó en primer lugar por haber gastado el menor tiempo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe >, < o =, según corresponda.

a. $\frac{7}{5} \square \frac{8}{3}$

b. $\frac{5}{4} \square \frac{10}{8}$

c. $2\frac{3}{2} \square 2\frac{7}{4}$

d. $\frac{1}{3} \square 2\frac{1}{3}$

e. $3\frac{1}{2} \square 2\frac{5}{4}$

f. $\frac{2}{3} \square 2\frac{1}{3}$

3 Ordena de menor a mayor los números racionales de cada lista.

a. $\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

b. $2\frac{5}{6}, \frac{13}{10}, 2\frac{1}{5}, \frac{10}{10}$

c. $\frac{22}{42}, -\frac{4}{14}, -\frac{8}{30}, \frac{14}{18}$

d. $\frac{39}{21}, \frac{75}{24}, \frac{27}{15}, \frac{9}{12}$

Razonamiento

4 Escribe un número natural en cada espacio vacío, de tal forma que se satisfaga la desigualdad correspondiente.

a. $2\frac{1}{4} < 2\frac{6}{\square}$

b. $\frac{\square}{5} < \frac{4}{10}$

c. $\frac{3}{\square} > \frac{1}{2}$

d. $2\frac{2}{4} > \frac{\square}{5}$

Ejercitación

5 Ordena de menor a mayor cada grupo de números.

a. 0,5; −0,5; 1,75; 4,55; 4,5; $4,\overset{\frown}{5}$; 0

b. 1,2; $1,\overset{\frown}{2}$; 1,07; 1,7; 3,3; −5,6

c. $\frac{3}{5}$; $0,\overset{\frown}{6}$; $0,\overset{\frown}{63}$; $-0,\overset{\frown}{6}$; $-0,\overset{\frown}{66}$

Resolución de problemas

6 Responde las preguntas a partir de la información de la Tabla 2.

Alimento	Cantidad aproximada de calorías
Papas fritas	$\frac{127}{450}$
Gaseosa personal	$\frac{230}{550}$
Porción de pizza	$\frac{30}{75}$
Hamburguesa	$\frac{120}{80}$

Tabla 2

a. ¿Cuál es el alimento que tiene menos calorías?

b. ¿Cuál es el alimento con mayor cantidad de calorías?

c. Entre la hamburguesa y la porción de pizza, ¿cuál tiene más calorías?

d. ¿Qué combinación tiene menos calorías, la gaseosa y las papas fritas o la gaseosa y la porción de pizza?

7 Para el diseño hidráulico de un edificio, el ingeniero utilizará tubería de tres diámetros diferentes: tubería tipo *A*, de media pulgada; tubería tipo *B*, de tres octavos de pulgada, y tubería tipo *C*, de tres cuartos de pulgada. ¿Cuál es el orden de menor a mayor de los tres tipos de tubería, de acuerdo con la magnitud de su diámetro?

6 Adición de números racionales

Explora

Las entradas para un partido de fútbol se vendieron así:

$\frac{5}{9}$ para los hinchas del equipo rojo,

$\frac{3}{9}$ para los hinchas del equipo azul y

$\frac{1}{9}$ para hinchas de otros equipos.



- ¿Qué parte del estadio estuvo ocupada durante el partido?

6.1 Adición de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber qué parte del estadio estuvo ocupada, se puede hacer uso de una recta numérica como la de la Figura 1. Primero, se divide la unidad en nueve partes iguales; luego, se ubica el punto que corresponde a $\frac{5}{9}$; a partir de este punto se cuentan $\frac{3}{9}$ más y se llega a $\frac{8}{9}$. Por último, a partir de $\frac{8}{9}$ se avanza $\frac{1}{9}$ más y se llega a 1.

Como $\frac{9}{9}$ corresponde a la ocupación total, significa que los hinchas de los tres equipos ocuparon todo el estadio.

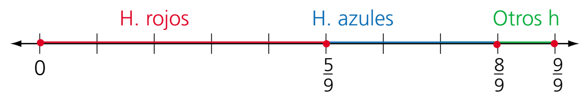


Figura 1

Para **sumar dos números racionales con el mismo denominador**, se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Ejemplo 1

Para calcular $\frac{1}{5} + \frac{6}{5}$ se procede así:

1. Se suman los numeradores y el resultado es el numerador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{\square} = \frac{7}{\square}$$

2. Se deja el mismo denominador, que será el denominador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5}$$

Para **sumar dos números racionales con diferente denominador**, se buscan fracciones equivalentes a los números racionales dados, que tengan el mismo denominador; luego se adicionan las fracciones equivalentes obtenidas como en el caso anterior.

Ejemplo 2

Para resolver la suma $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3}$ se sigue este procedimiento:

1. Se hallan racionales equivalentes a los dados, cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores, que en este caso es 24.

$$-\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} = -\frac{6}{24} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$$

2. Se suman las fracciones obtenidas.

$$\left(-\frac{6}{24}\right) + \frac{8}{24} = \frac{-6+8}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Por tanto, $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Ejemplo 3

María preparó arroz con leche. Ella usó la media libra que había en una bolsa y el cuarto de libra que quedó en otra. Para saber cuánto arroz usó, ella suma así:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Entonces, María usó $\frac{3}{4}$ de libra de arroz en su preparación.



Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición) resolviendo ejercicios numéricos.

6.2 Adición de números racionales en expresión decimal

Para **sumar** dos **números racionales** en **expresión decimal**, se sigue el procedimiento que se indica a continuación:

- Se escriben los sumandos en posición vertical, garantizando que las comas queden una debajo de la otra.
- Se resuelve la suma como si se tratara de números enteros.
- Se ubica la coma de la suma alineada con la coma de los sumandos.

Ejemplo 4

Para hallar 45,67 + 3,8:

Se escriben los sumandos en posición vertical, de tal forma que las comas queden alineadas una debajo de la otra. En el segundo sumando se puede escribir 0 en el lugar de las centésimas para que ambos números queden con la misma cantidad de cifras decimales.

$$\begin{array}{r} 45{,}67 \\ +\quad 3{,}80 \\ \hline 49{,}47 \end{array}$$

Por tanto, 45,67 + 3,8 = 49,47

Ejemplo 5

Para llegar al colegio cada mañana, Teresa recorre 5,07 km en su patineta y 1,4 km en taxi. Para saber cuántos kilómetros recorre Teresa en total, se debe efectuar la suma 5,07 + 1,4:

$$\begin{array}{r} 5{,}07 \\ +\quad 1{,}40 \\ \hline 6{,}47 \end{array}$$

Teresa recorre en total 6,47 km hasta el colegio.

6.3 Propiedades de la adición de números racionales

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
Clausurativa	La suma de dos números racionales siempre es un número racional.	$\frac{5}{4} + \left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
Conmutativa	El orden en el que se suman dos números racionales no altera la suma.	$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Modulativa	La suma de todo número racional con 0 da como resultado el mismo número racional. El 0 es el módulo de la adición.	$\frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$ $\left(-\frac{9}{7}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{9}{7}$
Invertiva	Todo número racional sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$\frac{12}{9} + \left(-\frac{12}{9}\right) = 0$
Asociativa	Cuando se suman más de dos números racionales, estos se pueden agrupar sin importar el orden y siempre se obtiene el mismo resultado.	$\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}$ $\frac{3}{5} + \left(\frac{19}{12}\right) = \left(\frac{17}{20}\right) + \frac{4}{3}$ $2\frac{11}{60} = 2\frac{11}{60}$

Tabla 1

En la calculadora

Suma de expresiones decimales

Para resolver 3,85 + 2,37 en la calculadora, digita la secuencia:

[3] [·] [8] [5] [+]
[2] [·] [3] [7] [EXE]

- Verifica con la calculadora los ejemplos de la página.



Ten en cuenta

El opuesto aditivo de un número racional $\frac{a}{b}$ es otro racional $-\frac{a}{b}$, de manera que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$.

6 Adición de números racionales

Ten en cuenta

En la antigüedad los egipcios escribían las fracciones como una suma de varias fracciones con numerador igual a 1. Por ejemplo, escribían $\frac{8}{15}$ como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Para ir de una ciudad *A* a una ciudad *B* en tres días, Santiago hace los siguientes recorridos: el primer día recorre $\frac{2}{7}$ de km, el segundo día avanza $\frac{9}{4}$ de km más, y el tercer día recorre $\frac{1}{4}$ de km más que el primer día. ¿Cuál es la distancia entre la ciudad *A* y la ciudad *B*?

Solución:

Para responder la pregunta, se suman los recorridos diarios que realiza Santiago, y de esta manera se obtiene la distancia entre las dos ciudades.

Entonces, la distancia entre las ciudades *A* y *B* es:

$$\frac{2}{7} + \frac{9}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right) = \frac{8 + 63 + 7 + 8}{28} = \frac{86}{28} = \frac{43}{14}$$

Por lo tanto, entre las ciudades *A* y *B* hay $\frac{43}{14}$ km o 3,07 km.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes adiciones y simplifica el resultado cuando sea posible.

a. $-\frac{5}{9} + \frac{3}{7}$ b. $\frac{8}{25} + \frac{12}{45}$

c. $\frac{4}{24} + \frac{5}{32}$ d. $-\frac{15}{9} + \frac{1}{24}$

e. $\frac{9}{18} + \frac{2}{14}$ f. $-\frac{4}{12} + \frac{6}{30}$

g. $-\frac{5}{12} + \left(-\frac{2}{15}\right)$ h. $-\frac{4}{9} + \left(-\frac{11}{7}\right)$

i. $\frac{4}{17} + \left(-\frac{6}{46}\right)$ j. $\frac{10}{12} + \frac{4}{15}$

Razonamiento

3 Construye una operación en la que uses las propiedades de la adición de números racionales que se indican en cada caso.

a. Propiedad asociativa y propiedad modulativa.

b. Propiedad modulativa, propiedad invertiva y propiedad clausurativa.

c. Propiedad clausurativa, propiedad conmutativa y propiedad modulativa.

4 Lee y responde.

Andrés afirmó que todas las propiedades de la adición de números enteros se satisfacen también en los números racionales. ¿Por qué puede asegurar eso Andrés? ¿Se satisfacen todas las propiedades de la adición de números racionales en la adición de números naturales?

Ejercitación

5 Relaciona cada operación de la izquierda con el resultado que le corresponde a la derecha.

a. $\frac{7}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$ (b.) $\frac{79}{24}$

b. $\frac{3}{8} + \frac{4}{6} + \frac{9}{4}$ (c.) $\frac{11}{4}$

c. $\frac{2}{6} + \frac{5}{12} + \frac{8}{4}$ (a.) $\frac{79}{12}$

6 Realiza las siguientes adiciones entre decimales.

a. 1,8 + 5,4 b. 22,167 + 3,18

c. 3,75 + 5 d. 2,13 + 23,20

e. 22,167 + 23,18 f. 3,405 + 5,04

7 Calcula el perímetro de los triángulos de la Figura 2, si las medidas están dadas en centímetros.

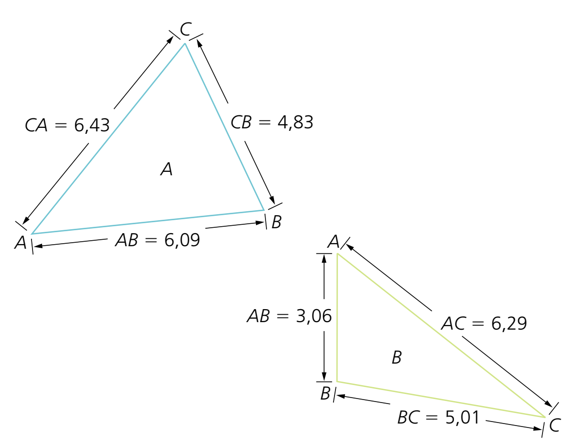


Figura 2

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición) resolviendo ejercicios numéricos.

Razonamiento

8 Completa las pirámides de las figuras 3 y 4, sabiendo que el valor de cada ladrillo corresponde a la suma de los dos números de los ladrillos que tiene justo debajo.

a.

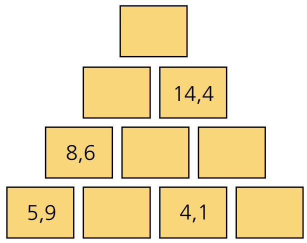


Figura 3

b.

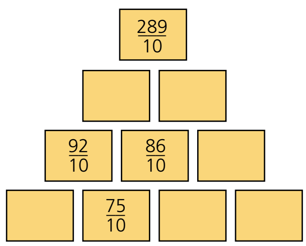


Figura 4

9 Determina si cada igualdad es correcta o no.

a. 5,2 + 1,6 = 1,8

b. 4,6 + 3,444 = 8,044

c. 3,02 + 1,14 = 4,16

d. 33,3 + 10,4 = 200,8

e. 2,3456 + 0,003 = 2,00849

f. 5,8 + 34,2 = 40

10 Indica el error que se cometió en cada caso.

a. $-\frac{9}{7} + 0 = \frac{9}{7}$

b. $\frac{12}{9} + \left(-\frac{12}{9}\right) = -\frac{24}{9}$

c. $\frac{5}{4} + \left(-\frac{7}{4}\right) = 3$

d. $\frac{4}{6} + \frac{3}{8} + \frac{9}{4} = 0$

e. $\frac{3}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{15}{18}$

Ejercitación

11 Halla el número decimal que falta para completar cada igualdad.

a. ☐ + 0,16 = 1,08

b. 4,36 + ☐ = 7,19

c. 7,08 + 8,34 = ☐

d. ☐ + 15,4 = 29,8

e. 2,54 + ☐ = 4,49

Resolución de problemas

12 En la Figura 5 se muestran los pesos de algunos alimentos que se guardan en la alacena de una cocina.

Halla los pesos combinados de los productos que se indican en cada caso.

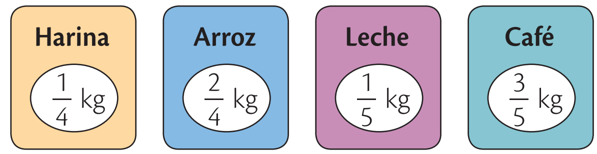


Figura 5

a. Arroz, leche y café

b. Café y leche

c. Arroz y harina

d. Harina, leche y café

13 César realizó las siguientes compras en el supermercado:

0,325 kg de naranjas
1,5 kg de carne de cerdo
2,5 kg de guanábana
0,5 kg de pechuga de pollo
1,3 kg de mandarinas

a. ¿Cuánto pesan todas las frutas que compró?

b. ¿Cuánto pesaron en total todas las carnes?

c. ¿Cuánto pesó todo el mercado que hizo César?

14 Para ayudar a una fundación, algunos estudiantes de grado séptimo decidieron reunir alimentos y donarlos.

Andrea aportó 2,5 kg de arroz, Mateo llevó $\frac{4}{2}$ kg de fréjol, Catalina ayudó con $\frac{3}{9}$ kg de arroz y Juan cooperó con 3,75 kg de fréjol.

a. ¿Cuánto arroz y cuánto fréjol recogieron en total?

b. ¿Qué recogieron más, arroz o fréjol?

15 De un depósito con agua se sacan 184,5 litros, después se sacan 128,75 litros y luego se sacan 84,5 litros. Al final quedan en el depósito 160 litros. ¿Qué cantidad de agua había en el depósito?



7 Sustracción de números racionales

Explora

Andrea recorre $\frac{10}{4}$ de kilómetro en línea recta de su casa a la oficina. Ella siempre hace una parada para recoger a su compañero Carlos, que vive a $\frac{3}{4}$ de kilómetro de la oficina.

- ¿Cuál es la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos?

7.1 Sustracción de números racionales en expresión fraccionaria

El recorrido de Andrea se puede representar como se muestra en la Figura 1.



Figura 1

En este recorrido se han marcado puntos cada $\frac{1}{4}$ de kilómetro. Los arcos rojos indican la distancia de la oficina a la casa de Carlos, $\frac{3}{4}$ de km, y los azules la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos, que corresponde a $\frac{7}{4}$ de km. El resultado anterior se puede obtener sin ayuda de la Figura 3.24 resolviendo la sustracción $\frac{10}{4} - \frac{3}{4}$.

Para **sustraer números racionales con igual denominador**, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplo 1

La sustracción propuesta para solucionar la situación inicial se realiza así:

$$\frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{10 - 3}{4} = \frac{7}{4}$$

Para **sustraer racionales con diferente denominador**, primero se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados que tengan el mismo denominador; luego, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 2

Para hallar $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ se siguen estos pasos:

1. Se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores. → $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ y $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$
2. Se restan los racionales de igual denominador. → $\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

Por tanto, $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

7.2 Sustracción de números racionales en expresión decimal

Para **sustraer expresiones decimales**, se escribe el sustraendo debajo del minuendo de tal manera que queden alineadas las cifras del mismo valor posicional; luego, se resta como en los números enteros. A la diferencia se le agrega la coma debajo de las comas.

Ejemplo 3

Observa cómo se sustrae 34,28 de 124,85.

124,85	←	Minuendo
− 34,28	←	Sustraendo
90,57	←	Diferencia

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces se cumple que:

- $\frac{a}{b} - \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
- $\frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

App

Representación y adición de números racionales

Abre la aplicación *Fraction Bingo* y practica la representación de fracciones y la adición de números racionales.



Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (sustracción) resolviendo ejercicios numéricos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Los $\frac{5}{12}$ de los empleados de una empresa son mujeres. ¿Cuál es la fracción de los empleados que son hombres?

Solución:

La totalidad de los empleados de la empresa se representa con la fracción $\frac{12}{12}$. Para calcular la fracción de los trabajadores que son hombres, se debe efectuar la sustracción:

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Por lo tanto, la cantidad de hombres que tiene la empresa corresponde a $\frac{7}{12}$ del total de empleados.

Ten en cuenta

Toda fracción de la forma $\frac{a}{a}$, donde $a \neq 0$, representa la unidad o el todo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes sustracciones.

a. $\frac{8}{9} - \frac{3}{10}$ b. $-\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$

c. $\frac{8}{15} - \left(-\frac{5}{12}\right)$ d. $\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{5}{18}\right)$

e. $\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{3}\right)$ f. $\frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{4}\right)$

3 Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

a. $\frac{6}{13} - \frac{4}{6} - \frac{1}{3}$ ( ) $\frac{1}{2}$

b. $\frac{7}{6} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{4}$ ( ) $\frac{49}{60}$

c. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right)$ ( ) $\frac{59}{5}$

d. $\left(-\frac{13}{5}\right) - \left(-\frac{72}{5}\right)$ ( ) $-\frac{7}{13}$

e. $\left(-\frac{21}{34}\right) - \left(-\frac{17}{9}\right)$ ( ) $\frac{389}{306}$

Razonamiento

4 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Siempre que se sustraen dos números racionales se obtiene otro número racional. ( )

b. La diferencia de dos números racionales siempre es menor que el minuendo y que el sustraendo. ( )

c. Para que sea posible sustraer dos números racionales estos siempre deben tener el mismo denominador. ( )

Ejercitación

5 Escribe los números que faltan en las casillas verdes de la Figura 2 para que se cumpla cada igualdad.

1,5	–		=	0,7
–		–		–
	–		=	
=		=		=
0,6	–		=	3,8

Figura 2

Resolución de problemas

6 Una botella de 1,5 L está llena de agua. Si se consumen 0,330 L de agua, ¿cuántos litros de agua quedan en la botella?

7 La superficie de África está cerca de los 30 221 000 km^2. En la Tabla 1 se muestra la fracción aproximada de superficie que le corresponde a cada uno de los demás continentes.

Continente	Superficie
Europa	$\frac{1}{3}$
América	$\frac{141}{100}$
Oceanía	$\frac{17}{60}$
Asia	$\frac{148}{100}$
Antártida	$\frac{23}{50}$

Tabla 1



SM Ediciones

a. ¿Qué continente tiene la menor superficie?

b. ¿Qué contienente tiene la mayor superficie?

c. ¿Cuál es la diferencia de las fracciones correspondientes a las superficies del continente más grande y del más pequeño?

8 Multiplicación y división de números racionales

Explora

José vende vasos de gaseosa de $\frac{1}{4}$ de litro cada uno.



- Si el domingo vendió nueve vasos de gaseosa, ¿cuántos litros vendió en total?

8.1 Multiplicación de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber cuántos litros de gaseosa vendió José, se suma nueve veces el contenido de gaseosa de un solo vaso.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Sumar nueve veces el número $\frac{1}{4}$ equivale a multiplicarlo por 9, así que:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{1}=\frac{1\cdot 9}{4\cdot 1}=\frac{9}{4}$$

Por lo tanto, José vendió $\frac{9}{4}$ o 2,25 litros de gaseosa.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Ejemplo 1

La constructora Miraceti construirá una nueva sede para sus oficinas en un terreno que mide $\frac{15}{2}$ m de ancho y $\frac{121}{5}$ m de largo. ¿Cuál es el área con que cuenta para construir el edificio?

$$A=\frac{15}{2}\text{ m}\cdot\frac{121}{5}\text{ m}=\frac{15\text{ m}\cdot 121\text{ m}}{2\cdot 5}=\frac{1\,815}{10}\text{ m}^2=\frac{363}{2}\text{ m}^2$$

El área del terreno es de $\frac{363}{2}$ m^2; es decir, 181,5 m^2.

Para **multiplicar tres o más números racionales** en su expresión fraccionaria, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Ejemplo 2

Halla el producto de $\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}$.

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 9\cdot 1}{8\cdot 5\cdot 2}=\frac{27}{80}$$

8.2 Multiplicación de números racionales en expresión decimal

Para **multiplicar expresiones decimales**, se efectúa la multiplicación como si se tratara de números enteros, y se separa en el producto tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

Ejemplo 3

Observa cómo se realiza la operación 45,87 · 3,5.

			4	5,	8	7
				×	3,	5
	2	2	9	3	5	
1	3	7	6	1		
1	6	0,	5	4	5	

Tres cifras decimales (8, 7, 5 en los factores)

Tres cifras decimales (5, 4, 5 en el producto)

Cálculo mental

Multiplicar números racionales

Antes de efectuar productos de números racionales, conviene simplificar al máximo. Por ejemplo:

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

Luego, se simplifica 2 y 4 entre 2 y se obtiene que:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

- Simplifica y calcula:

$$\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{5}{4}$$

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (multiplicación y división) resolviendo ejercicios numéricos.

8.3 Propiedades de la multiplicación de números racionales

La multiplicación de números racionales cumple las propiedades que se enuncian en la Tabla 1.

Propiedad	Explicación
Clausurativa	El producto de dos o más números racionales es otro número racional.
Conmutativa	El orden de los factores no altera el producto.
Asociativa	Al multiplicar tres o más números racionales, estos se pueden agrupar de diferentes formas y el producto no se altera.
Modulativa	La multiplicación de un número racional con el número 1, da como resultado el mismo número racional.
Invertiva	El producto que se obtiene al multiplicar un número racional por su inverso multiplicativo es la unidad.
Anulativa	Todo número racional multiplicado por cero da como resultado cero.
Distributiva	El producto de un número racional por una suma de números racionales es equivalente a la suma de los productos del número racional por cada sumando.

Tabla 1

Ejemplo 4

Observa cómo se aplican dos de las propiedades de la multiplicación de números racionales expresados en forma fraccionaria y decimal.

a. Propiedad conmutativa

$$\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{6}$$

$$6{,}3\cdot(-1{,}5)=(-1{,}5)\cdot 6{,}3=-9{,}45$$

b. Propiedad distributiva

$$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{13}{15}=\frac{3}{20}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{20}=\frac{13}{20}$$

$$5{,}4\cdot(4{,}3+2)=(5{,}4\cdot 4{,}3)+(5{,}4\cdot 2)$$

$$5{,}4\cdot 6{,}3=23{,}22+10{,}8$$

$$34{,}02=34{,}02$$

8.4 División de números racionales en expresión fraccionaria

Para **dividir dos números racionales**, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. En general, se cumple que:

$$\text{Si } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}\in\mathbb{Q}, \text{ entonces } \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Ejemplo 5

Julián tenía en su nevera $\frac{3}{4}$ de kilogramo de queso y lo dividió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilogramo cada una. Para saber cuántas porciones obtuvo, es necesario dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{8}$.

$$\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{1}=\frac{24}{4}=6$$

Julián obtuvo seis porciones de queso.

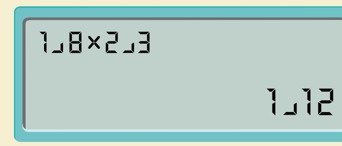
En la calculadora

Para multiplicar números racionales en su expresión fraccionaria en la calculadora, se utilizan las teclas a b/c y x.

Así, para multiplicar $\frac{1}{8}$ por $\frac{2}{3}$ se digita esta secuencia:

1 a b/c 8 x 2 a b/c 3 EXE

En la calculadora, se observa:



- Utiliza la calculadora para efectuar el siguiente producto.

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4}$$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional diferente de cero, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$ y el producto de ambos es 1.



SM Ediciones

8 Multiplicación y división de números racionales

Ejemplo 6

Andrés disponía de $\frac{5}{3}$ de litro de pintura para pintar las cuatro paredes de su alcoba. ¿Qué fracción de pintura usó en cada pared, si en cada una utilizó la misma cantidad?

Para saber la fracción de pintura que usó Andrés en cada pared, se debe encontrar el cociente de $\frac{5}{3} \div 4$.

Al resolver, se tiene que: $\frac{5}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Andrés usó $\frac{5}{12}$ de litro de pintura en cada pared.

Ten en cuenta

Una **fracción compleja** es aquella en la que tanto el numerador como el denominador son fracciones. Las fracciones complejas son equivalentes a una división, por ejemplo:

$$\frac{\frac{11}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{11}{5} \div \frac{3}{7}$$

Ejemplo 7

Observa cómo se resuelve la operación $\dfrac{\frac{9}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{12}{5} - \frac{7}{10}}$.

$$\dfrac{\frac{9}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{12}{5} - \frac{7}{10}} = \dfrac{\frac{35}{12}}{\frac{17}{10}}$$

Se resuelven las operaciones del numerador y del denominador.

$$= \frac{35}{12} \div \frac{17}{10}$$

Se expresa la fracción compleja como una división.

$$= \frac{35}{12} \cdot \frac{10}{17} = \frac{350}{204} = \frac{175}{102}$$

Se dividen las fracciones y se simplifica el cociente.

8.5 División de números racionales en expresión decimal

Para **dividir dos números racionales en expresión decimal**, se eliminan las comas decimales multiplicando el dividendo y el divisor por una misma potencia de 10. Luego, se efectúa la división entre los números enteros obtenidos.

Ejemplo 8

Al efectuar la división 0,3 ÷ 0,8 se tiene en cuenta lo siguiente:

Como ambas expresiones decimales tienen una sola cifra decimal, se multiplica cada una por 10 para obtener números enteros (0,3 · 10 = 3 y 0,8 · 10 = 8). Los números enteros obtenidos se dividen, como se muestra en la Figura 1.

```
3 0    | 8
  6 0    0, 3 7 5
    4 0
      0
```

Figura 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. En la fiesta de cumpleaños de Juana, se sirvió jugo para los invitados en vasos de 0,25 L. Si en total se tienen 2,5 litros de jugo, ¿para cuántos invitados alcanzó?



SM Ediciones

Solución:

Para responder la pregunta, se debe dividir el total de jugo disponible entre la capacidad de cada vaso.

$$2{,}5 \div 0{,}25 = 250 \div 25 = 10$$

Por lo tanto, el jugo alcanzó para diez invitados.

Cálculo mental

Dividir entre una potencia de 10

Para dividir un número decimal entre una potencia de 10, basta con escribir el número decimal y correr la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10. Por ejemplo:

$$1{,}38 \div 100 = 0{,}0138$$

- Realiza la división 25,74 ÷ 1 000.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (multiplicación y división) resolviendo ejercicios numéricos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \frac{4}{12}$
b. $\frac{41}{3} \div \frac{22}{5}$
c. $\frac{15}{11} \div \frac{4}{5}$
d. $\frac{17}{5} \div \frac{4}{3}$
e. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$
f. $\left(-\frac{19}{8}\right) \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)$
g. $\left(\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4}\right) \div \frac{3}{2}$
h. $\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{3}\right)$

3 Resuelve las operaciones con expresiones decimales que se presentan a continuación.

a. $1{,}5 \cdot 0{,}35$
b. $6{,}2 \cdot 0{,}1$
c. $(-0{,}14) \div 2$
d. $(-27{,}778) \div 2{,}15$
e. $(-3{,}425) \cdot 1{,}7$
f. $(-43{,}4 \cdot 2{,}5) \div 3{,}7$

Comunicación

4 Explica a tus compañeros qué entiendes por inverso multiplicativo. Apoya tu exposición con dos ejemplos.

5 Indica, en cada caso, cuántas cifras decimales se deben separar en el producto al multiplicar cada par de factores.

a. Cada factor tiene dos cifras decimales.

b. Un factor tiene tres cifras decimales y el otro dos cifras decimales.

c. Un factor tiene dos cifras decimales y el otro una cifra decimal.

d. Un número entero negativo y un número decimal con dos cifras decimales.

Razonamiento

6 Une con una línea cada operación planteada en la izquierda con el cociente que le corresponde a la derecha.

a. Un sexto dividido tres	3
b. Dos novenos dividido dos	$\frac{1}{9}$
c. Tres medios dividido un medio	$\frac{1}{18}$
d. Seis octavos dividido un tercio	$\frac{18}{5}$
e. Tres quintos dividido un sexto	$\frac{9}{4}$
f. Doce tercios dividido un cuarto	$\frac{9}{10}$
g. Un décimo dividido un noveno	16

7 Explica el error que se cometió en el desarrollo de la división y corrígelo.

$$\frac{44}{3} \div \frac{9}{2} = \frac{44}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{396}{6} = 66$$

8 Resuelve.

Alejandro escribió $\frac{1}{8} \div \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \div \frac{1}{8}$.

a. ¿Qué propiedad quería aplicar Alejandro con esta expresión?

b. ¿Se puede aplicar esta propiedad a la división? Explica tomando como base la igualdad que planteó Alejandro.

c. ¿Hay alguna propiedad de la multiplicación de números racionales que se cumpla en esta división? Explica con ejemplos.

9 Escribe los números que satisfacen cada igualdad.

a. $(-0{,}5) \cdot \square = 5$
b. $100 \cdot \square = 3{,}75$
c. $\frac{3}{5} \div \square = 12$
d. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\square}{\square}\right) = -\frac{1}{8}$
e. $\left(-\frac{15}{7}\right) \div \left(\frac{\square}{\square}\right) = \frac{45}{7}$
f. $\left(\frac{\square}{\square}\right) \div \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{2}{9}$
g. $0{,}75 \div \square = 0{,}25$
h. $(-0{,}8) \div \square = -2$

Resolución de problemas

10 Lee y responde las preguntas.

a. Se tienen dos pliegos y medio de cartón que se deben cortar en octavos de pliego. ¿Cuántos octavos se pueden cortar?

b. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden servir de un galón de agua que contiene $\frac{18}{8}$ de litro?

c. Un automóvil recorrió $\frac{8}{10}$ de kilómetro en nueve minutos. ¿Qué fracción de kilómetro recorrió en tres minutos?

d. Se reparten $\frac{6}{8}$ de pizza en partes iguales entre seis personas. ¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada persona?

e. Oscar dispone de $\frac{3}{4}$ de hora para resolver tres problemas de matemáticas. ¿Qué fracción de la hora le debe dedicar a cada problema si quiere usar el mismo tiempo para cada uno? ¿En cuántos minutos resuelve cada problema?

Practica Más

Números racionales

Ejercitación

1. Escribe la fracción irreducible, equivalente a cada par de fracciones.

a. $\frac{78}{104}$ y $\frac{45}{60}$ b. $\frac{21}{63}$ y $\frac{32}{96}$

c. $\frac{86}{215}$ y $\frac{60}{150}$ d. $\frac{54}{36}$ y $\frac{63}{42}$

Comunicación

2. Marca con una X, en la Tabla 1, el conjunto al que pertenece cada número. Puedes marcar más de una opción.

Número	Naturales	Enteros	Racionales
-2			
$\frac{3}{8}$			
0,2			
$-\frac{5}{6}$			
$-\frac{9}{3}$			

Tabla 1

Expresión decimal de los números racionales

Ejercitación

3. Calcula la expresión decimal de cada número racional y clasifícala como finita o periódica.

a. $\frac{2}{6}$ b. $-\frac{24}{6}$ c. $\frac{22}{5}$

d. $-\frac{2}{7}$ e. $\frac{15}{6}$ f. $-\frac{7}{3}$

4. Halla la fracción generatriz de cada expresión decimal.

a. 0,58 b. 1,99

c. 5,525 d. $-0{,}321$

e. 1,23 f. $-4{,}248$

Números racionales en la recta numérica y relaciones de orden

Razonamiento

5. Identifica los números racionales representados en cada recta numérica.

a.

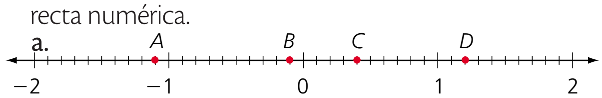


Figura 1

b.

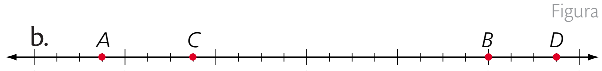


Figura 2

6. Representa cada número racional en la recta numérica y luego ordénalos de mayor a menor.

a. $A = \frac{4}{3}$ b. $B = -\frac{6}{8}$ c. $C = \frac{5}{2}$

d. $D = \frac{1}{8}$ e. $E = -\frac{13}{4}$ f. $F = -\frac{13}{16}$

Adición y sustracción de números racionales

Ejercitación

7. Escribe en los recuadros los números que hacen que las igualdades sean ciertas.

a. $-\frac{19}{3} + \frac{\square}{\square} = \frac{23}{10} + \frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{2} + \frac{\square}{\square} = \frac{5}{2}$

c. $\frac{\square}{\square} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{6}{8}$ d. $\frac{\square}{\square} + \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$

Resolución de problemas

8. Para preparar una receta, Andrés utiliza $\frac{7}{2}$ de kg de manzanas, $\frac{3}{4}$ de kg de mantequilla y $\frac{9}{2}$ de kg de masa para hojaldre.

a. ¿Cuánto pesa la mezcla de los tres ingredientes?

b. Si para una porción se necesita medio kilogramo de la mezcla, ¿cuántos kilogramos de mezcla no se utilizan?

Multiplicación y división de números racionales

Ejercitación

9. Calcula la fracción generatriz de las longitudes de los lados de la Figura 3 que están expresadas de forma decimal. Luego, halla el área de la figura.

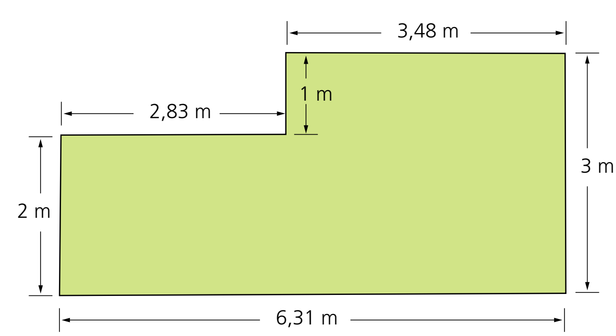


Figura 3

Resolución de problemas

10. Una máquina fabrica medio tornillo en $\frac{3}{2}$ segundos. ¿Cuántos tornillos fabrica en una hora y cuántos en $\frac{3}{4}$ de hora?

Resolución de Problemas

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

Tres amigos entrenan para una carrera de atletismo. Manuel recorre diariamente $\frac{13}{12}$ de km, Felipe, $\frac{17}{6}$ de km y Andrés, $\frac{23}{3}$ de km. ¿Cuál de ellos recorre más distancia al día?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información aporta el problema?

  R: La distancia que recorren diariamente tres personas que se preparan para una competencia atlética.

- ¿Qué se debe averiguar?

  R: Cuál atleta recorre más distancia al día.

2. Crea un plan

- Encuentra fracciones equivalentes a las fracciones dadas, que tengan el mismo denominador. Luego, compara los numeradores de las fracciones obtenidas y determina cuál de ellas es la mayor.

3. Ejecuta el plan

- Halla el m.c.m. de los denominadores de las tres fracciones.

3	6	12	2
3	3	6	2
3	3	3	3
1	1	1	

m. c. m. (3, 6, 12) $= 2^2 \cdot 3 = 12$

- Encuentra una fracción equivalente a cada fracción con denominador 12.

$$\frac{17}{6} = \frac{17 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{34}{12} \qquad \frac{23}{3} = \frac{23 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{92}{12}$$

- Compara las fracciones que tienen denominador común.

$$\frac{13}{12} < \frac{34}{12} < \frac{92}{12}$$

R: Andrés recorre más distancia al día.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la diferencia entre las distancias recorridas por Andrés y Manuel es $\frac{79}{12}$ de km.

Aplica la estrategia

1. Marcela resuelve quince ejercicios de matemáticas en $\frac{35}{60}$ de hora; Paula los resuelve en $\frac{9}{12}$ de hora y Valentina en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuál de ellas tarda menos tiempo en resolver los ejercicios?

   a. Comprende el problema

   b. Crea un plan

   c. Ejecuta el plan

   d. Comprueba la respuesta

Resuelve otros problemas

2. De un recipiente que contiene 1,395 kg de mantequilla se han utilizado tres porciones de 0,456 kg cada una. ¿Qué cantidad de mantequilla queda aún en el recipiente?

3. Para pintar una puerta, Javier utilizó $\frac{5}{4}$ de galón de pintura y para pintar una pared, Leonardo empleó 1,25 galones. ¿Cuál de los dos gastó más pintura?

4. Una caja de chocolatinas contiene 24 unidades de 32,5 g cada una. ¿Cuánto pesan siete de estas cajas?

5. Andrés compró un celular por $ 230. Si esta cantidad equivale a las $\frac{2}{3}$ partes de lo que llevaba, ¿cuánto dinero llevaba? ¿Cuánto dinero le quedó?

Formula problemas

6. Inventa y resuelve un problema que involucre la información de la Figura 1.

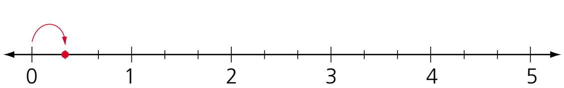


Figura 1

9 Ecuaciones con números racionales

Explora

Carlos puede comprar los $\frac{3}{4}$ de una torta, que completa cuesta $ 20.



SM Ediciones

- Si Juan cuenta con dos veces la cantidad de dinero que tiene Carlos, ¿cuánto dinero tiene Juan?

Para determinar cuánto dinero tiene Juan, primero se averigua cuánto tiene Carlos. Con este fin, se hallan los $\frac{3}{4}$ de $ 20, que corresponde al valor de la fracción de torta que puede comprar Carlos. Al hacer el cálculo, se obtiene que Carlos tiene $ 15, y dado que Juan tiene el doble de esa cantidad, él cuenta con $ 30.

En la solución de este problema se halló un valor desconocido a partir de algunas condiciones.

Las **ecuaciones** son igualdades en las cuales se desconocen uno o varios términos, denominados **variables** o **incógnitas**. Para representar las variables se emplean letras minúsculas.

Ejemplo 1

La igualdad $\frac{2}{3} + x = \frac{11}{3}$ es una ecuación en la que a la incógnita se le ha llamado x, y debe ser tal que sumada con $\frac{2}{3}$ dé $\frac{11}{3}$ como resultado.

En este caso, el valor de x es $\frac{9}{3}$, ya que $\frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$.

Se dice entonces que la solución de la ecuación es $x = \frac{9}{3} = 3$.

Para solucionar una ecuación con números racionales, se debe aplicar la **propiedad uniforme de las igualdades**.

Ten en cuenta

La **propiedad uniforme de las igualdades** indica que para los racionales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple que:

- $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$
- $\frac{a}{b} - \frac{e}{f} = \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \div \frac{e}{f}$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Sisa tomó una bolsa de harina y usó $\frac{1}{3}$ de su contenido para preparar galletas; luego empleó 1,5 kg para hacer una torta y aún le quedaron 2,5 kg. ¿Cuánta harina había en la bolsa inicialmente?

Solución:

Para resolver el problema se debe plantear una ecuación, en la que hay un término desconocido (x) que indica el peso inicial de la bolsa de harina.

$x - \frac{1}{3}x - 1{,}5 = 2{,}5$ ← Se plantea la ecuación.

$\frac{2}{3}x - 1{,}5 = 2{,}5$ ← Se efectúa la operación $x - \frac{1}{3}x$.

$\frac{2}{3}x - 1{,}5 + 1{,}5 = 2{,}5 + 1{,}5$ ← Se adiciona en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de $(-1{,}5)$.

$\frac{2}{3}x = 4$ ← Se opera a ambos lados de la ecuación.

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} \cdot 4$ ← Se multiplica a ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$.

$x = \frac{12}{2} = 6$ ← Se resuelven las operaciones indicadas.

La bolsa inicialmente contenía 6 kilogramos de harina.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$ b. $\frac{5}{3} = \frac{3}{7} + y$

c. $\frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - z$ d. $m - \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$

e. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = n - \frac{2}{9}$ f. $-\frac{1}{7} + \frac{3}{5} - r = \frac{2}{9}$

g. $\frac{2}{5}t - \frac{8}{3} = 7$ h. $\frac{12}{7}x + 3 = -8$

3 Halla el valor de x en cada caso.

a. $5{,}6x + 1{,}7 = 32{,}76$ b. $4{,}3x - 4{,}2 = 5{,}4$

c. $1{,}8x = 42{,}6$ d. $\frac{x}{2{,}3} = -18$

Razonamiento

4 Identifica el error en cada caso y corrígelo.

a.
$$x - 6{,}2 = -8$$
$$x - 6{,}2 - 6{,}2 = -8 - 6{,}2$$
$$x = -14{,}2$$

b.
$$-2x + 4{,}5 = 7$$
$$-2x + 4{,}5 - 4{,}5 = 7 - 4{,}5$$
$$-2x = 2{,}5$$
$$-2x \cdot (-2) = 2{,}5 \cdot (-2)$$
$$x = -5$$

c.
$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$
$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{9}{8}$$

5 Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

Ecuación	Solución	V	F
$x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$	$x = \frac{7}{6}$		
$\frac{6}{4}a + \frac{2}{10} = 4$	$a = \frac{38}{15}$		
$\frac{d}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2}{3}$	$d = \frac{13}{15}$		
$y - \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$	$y = \frac{11}{10}$		

Tabla 1

6 Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $x + 1{,}8 = 5{,}3$ ( ) $8{,}1$

b. $x - \frac{1}{3} = -\frac{4}{5}$ ( ) $3{,}5$

c. $2x + 2{,}1 = 18{,}3$ ( ) $-\frac{7}{15}$

d. $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{1}{8}$ ( ) $-\frac{5}{2}$

e. $x - 4 = \frac{1}{3}$ ( ) $-20{,}3$

f. $2 + x = -18{,}3$ ( ) $\frac{13}{3}$

Modelación

7 Escribe una ecuación para cada enunciado.

a. Un número menos $\frac{3}{4}$ es igual a 4.

b. La cuarta parte de un número aumentado en $\frac{5}{9}$ es igual a $\frac{1}{4}$.

c. El triple de un número es $\frac{8}{27}$.

d. Un número más $\frac{4}{5}$ es igual a 2.

Resolución de problemas

8 Lee y resuelve.

a. Juliana pensó en un número, lo multiplicó por $-\frac{4}{6}$ y al resultado le sumó $\frac{4}{9}$. Si al final obtuvo $\frac{2}{27}$, ¿cuál fue el número que pensó Juliana?

b. Mario pensó un número y lo multiplicó por $\frac{2}{5}$ para obtener $\frac{5}{9}$. ¿Qué número pensó Mario?

c. Si al triple de un número se le suma su mitad, se obtiene 60. ¿Cuál es el número?

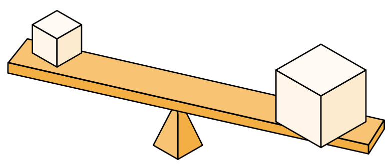
d. Francisco utilizó $\frac{3}{5}$ de la superficie de un terreno para sembrar hortalizas. ¿Qué parte del terreno está sin sembrar?

e. En el centro comercial, Andrés compró un videojuego por $ 24. Si esta cantidad equivale a las $\frac{2}{3}$ partes de lo que llevaba, ¿cuánto dinero tenía? ¿Cuánto dinero le quedó?

10 Potenciación de números racionales

Explora

Diana recibió una hoja de papel con la medida de la arista de dos cubos y otra con sus correspondientes volúmenes, pero la segunda hoja se le perdió.



- Si en la primera hoja aparecen los datos $\frac{1}{2}$ cm y $\frac{2}{5}$ cm, ¿qué información contenía la segunda hoja?

Para responder la pregunta del problema, se debe hallar el volumen de cada cubo multiplicando las medidas de sus tres dimensiones, así:

$$\text{Volumen del cubo 1: } \frac{1}{2}\text{ cm}\cdot\frac{1}{2}\text{ cm}\cdot\frac{1}{2}\text{ cm} = \frac{1}{8}\text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen del cubo 2: } \frac{2}{5}\text{ cm}\cdot\frac{2}{5}\text{ cm}\cdot\frac{2}{5}\text{ cm} = \frac{8}{125}\text{ cm}^3$$

Por tanto, la segunda hoja contenía los datos $\frac{1}{8}$ cm^3 y $\frac{8}{125}$ cm^3. Estos volúmenes se pueden expresar como $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ y $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, respectivamente.

La **potenciación** permite escribir de manera simplificada el producto de varios factores iguales.

10.1 Potencia de un número racional

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y n es un número natural, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula la siguiente potencia.

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$$

10.2 Propiedades de la potenciación de números racionales

El **producto de potencias de igual base** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual a la suma de los exponentes.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, y n y $m \in \mathbb{Z}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$

Ejemplo 2

Calcula $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4$

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{2+4} = \left(-\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{(-3)^6}{7^6} = \frac{729}{117\,649}$$

El **cociente de dos potencias de la misma base** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual a la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, y n y $m \in \mathbb{Z}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$

Ten en cuenta

- Las potencias de exponente par son siempre positivas.
- Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros.

Ejemplo 3

Observa cómo se calcula $\left(-\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^3$.

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^3 = \left(-\frac{4}{9}\right)^{4-3} = \left(-\frac{4}{9}\right)^1 = -\frac{4}{9}$$

La **potencia de una potencia** es otra potencia con la misma base y con el exponente igual al producto de los exponentes.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, y n y $m \in \mathbb{Z}$, entonces: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$.

Ejemplo 4

Resuelve $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3$.

$$\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{5}{3}\right)^6 = \frac{5^6}{3^6} = \frac{15\,625}{729}$$

Una **potencia con exponente negativo** es equivalente al inverso multiplicativo de la base elevado al mismo exponente, pero positivo:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Ejemplo 5

Observa la aplicación de la propiedad anterior.

a. $\left(\frac{6}{13}\right)^{-4} = \left(\frac{13}{6}\right)^4$ **b.** $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-7} = (-5)^7$ **c.** $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3$

10.3 Potenciación de números racionales en expresión decimal

Si a es una expresión decimal y n un número natural, entonces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo 6

En cierto experimento, una población de bacterias se reduce, quedando 0,25 partes cada hora. ¿Qué parte quedará al cabo de tres horas?

Para responder la pregunta es necesario calcular $(0{,}25)^3$, así:

$$(0{,}25)^3 = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}015625$$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^m$

Ten en cuenta

Cualquier número racional diferente de 0 elevado al exponente 0 es igual a 1.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación — TIC

http://www.vitutor.com/di/r/a_13e.html

Realiza ejercicios aplicando las propiedades de la potenciación.

10 Potenciación de números racionales

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el resultado de cada operación.

a. $(1{,}3) \cdot (1{,}3)^3$ b. $[(2{,}7)^2]^2$ c. $(0{,}45)^0 \cdot (0{,}45)^2$

Solución:

a. $(1{,}3) \cdot (1{,}3)^3 = (1{,}3)^{1+3} = (1{,}3)^4 = 2{,}8561$

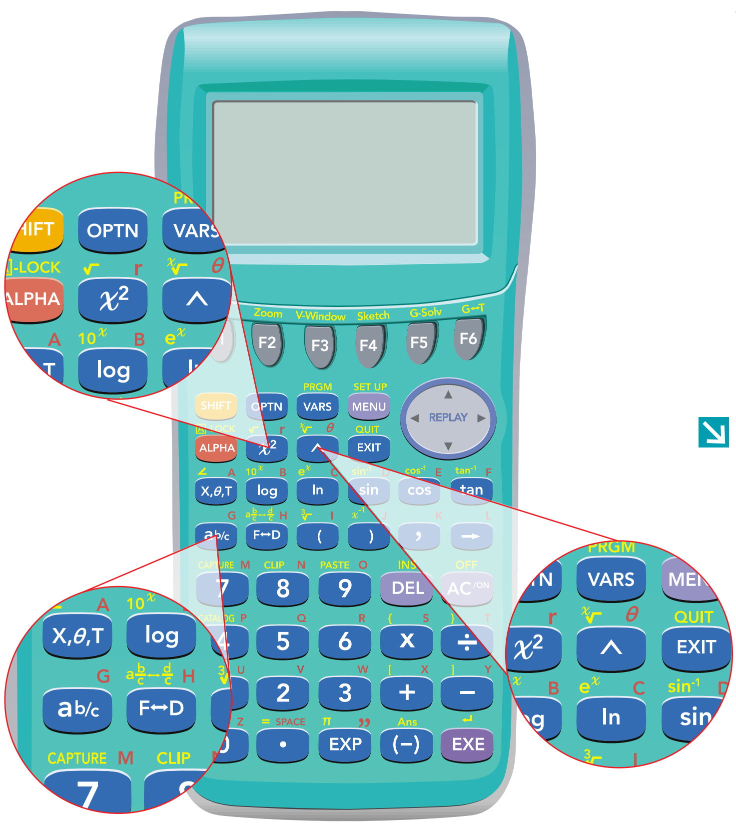
b. $[(2{,}7)^2]^2 = (2{,}7)^4 = 53{,}1441$

c. $(0{,}45)^0 \cdot (0{,}45)^2 = 1 \cdot 0{,}2025 = 0{,}2025$

MatemaTICS

Calcula potencias con la calculadora científica

Identifica en tu calculadora las teclas que te permiten escribir fracciones y calcular potencias.

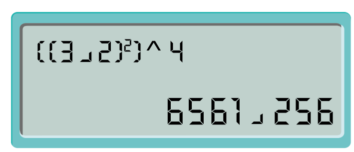


- Observa cómo efectuar las potencias $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^4$ y $\left(\frac{3}{2^2}\right)^4$ en la calculadora.

Para obtener el resultado de la potencia $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^4$ se digita la secuencia:

((3 ab/c 2) x^2) ^ 4 EXE

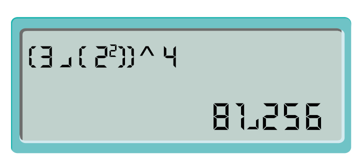
En la pantalla se registra:



Para calcular $\left(\frac{3}{2^2}\right)^4$ se digita:

(3 ab/c (2 x^2)) ^ 4 EXE

En la pantalla se registra:



- Usa la calculadora para determinar si cada una de las siguientes igualdades es verdadera o falsa. En caso de que alguna sea verdadera, indica qué propiedad o propiedades de la potenciación garantizan dicha igualdad.

a. $\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2^3}{3} \div \frac{3^3}{4}$ b. $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \div \left(\frac{7}{4}\right)^2$ c. $\left[\left(-\frac{2}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\right]^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{12}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la potencia de números racionales con exponentes enteros.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el valor de cada expresión usando las propiedades de la potenciación correspondientes.

a. $\left(\frac{7}{9}\right)^3$

b. $\left(-\frac{7}{3}\right)^4$

c. $\left(-\frac{6}{2}\right)^5$

d. $\left(\frac{3}{6}\right)^2$

e. $\left(\frac{2}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^3$

f. $\left(-\frac{3}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{9}\right)^{-1}$

g. $\left[\left(-\frac{7}{5}\right)^2\right]^3$

h. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^3\right]^2$

i. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$

j. $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2$

k. $\left(\frac{3}{8}\right)^7\div\left(\frac{3}{8}\right)^2$

l. $\left(\frac{4}{3}\right)^4\div\left(\frac{4}{3}\right)^2$

m. $\dfrac{\left[\left(-\frac{2}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\right]^3}{\left[\left(-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\right]^8}$

n. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3\div\left(-\frac{3}{4}\right)^5\right]^4$

3 Expresa cada decimal en su forma fraccionaria y calcula cada potencia.

a. $(1,3)^3$ b. $(0,5)^4$ c. $(-4,5)^2$

d. $(9,9)^3$ e. $(7,7)^2$ f. $(-2,1)^5$

4 Completa la Tabla 1 con el volumen del cubo, dada la longitud de su lado.

Lado (l)	Volumen (l^3)
$\frac{2}{5}$ cm	
1,5 cm	
$\frac{5}{8}$ cm	
12,5 cm	
$\frac{4}{7}$ cm	
$\frac{5}{4}$ cm	

Tabla 1

5 Resuelve cada una de las siguientes operaciones con decimales.

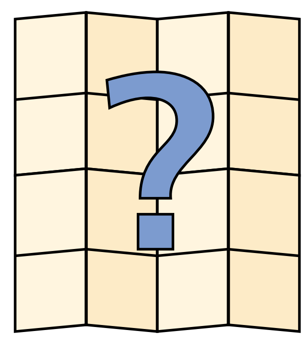
a. $(3,5)^5 \div (3,5)^2$ b. $(2,3)^5 \div (2,3)^0$

c. $[(-1,5)^2]^3$ d. $[(2,5)^4]^0$

Resolución de problemas

6 Camila quiere enviar por correo una pieza de arte de forma cúbica. La agencia de envíos cuenta con cajas de cartón cúbicas de 64 cm^3 cada una. Si cada arista de la obra de arte mide $\frac{19}{5}$ cm, ¿esta cabrá en la caja con la que cuenta la agencia?

7 Después de doblar una hoja de papel por la mitad, luego doblarla de nuevo por la mitad y así sucesivamente, se obtienen cuadrados cada uno con un área equivalente a $\frac{1}{16}$ de la superficie inicial de la hoja.



¿Cuántos dobleces se le realizaron a la hoja?

8 Una tortuga debe partir de 0 y llegar hasta el punto 1. Durante el primer segundo llega hasta la mitad del segmento, al siguiente segundo avanza hasta la mitad del segmento que le resta por recorrer y, de esa manera, cada segundo avanza hasta la mitad del segmento que aún le queda por transitar.

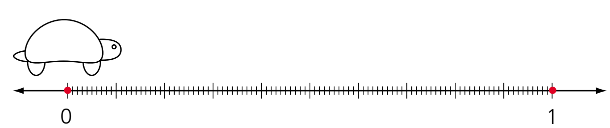


Figura 1

a. En la Figura 1, marca y escribe los números a los que llega la tortuga después de cada segundo.

b. ¿Llegará la tortuga hasta el punto 1? Explica.

9 Para sostener una placa sobre un río se han instalado cuatro columnas, donde la longitud de cada columna equivale a los $\frac{2}{3}$ de la columna anterior. Tomando como unidad la medida de la columna más larga, ¿a qué fracción de esta corresponden las demás columnas?

11 Radicación de números racionales

Explora

Mateo compró un terreno con forma cuadrada de $\frac{225}{4}$ m^2 de superficie y desea cercarlo con una malla para llevar a pastar sus vacas.



- ¿Cuántos metros de malla necesita Mateo para cercar todo el terreno?

Para determinar la cantidad de malla que requiere Mateo para cercar el terreno, se debe calcular el perímetro. Es necesario entonces hallar la longitud del lado de un cuadrado de $\frac{225}{4}$ m^2.

La superficie de un cuadrado se halla elevando al cuadrado la longitud de uno de sus lados. Así que, como $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$ m^2, entonces el lado del cuadrado mide $\frac{15}{2}$ m y su perímetro $\frac{15}{2}$ m $\cdot 4 = \frac{60}{2}$ m $= 30$ m.

Por lo tanto, Mateo necesita 30 m de malla para cercar el terreno.

Cuando Mateo halló el número que multiplicado por sí mismo dio el valor de la superficie, él calculó la raíz cuadrada de esta.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}$ si y solo si $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d}$.

A $\frac{a}{b}$ se le denomina raíz enésima de la cantidad subradical $\frac{c}{d}$ y n, número mayor que 1, es el índice de la raíz.

11.1 Raíz de un número racional

Para hallar la raíz enésima de un número racional, se calcula la raíz tanto del numerador como del denominador.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}, \text{ ya que } \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}.$$

Si el índice del radical es impar, la cantidad subradical puede ser positiva o negativa. Si el índice es par, solo se pueden calcular raíces de cantidades positivas.

Ejemplo 2

Observa cómo se calculan las siguientes raíces.

a. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ o $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

b. $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ no existe, porque ningún número elevado a la cuarta potencia es negativo.

c. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$, ya que $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{32}{243}$

d. $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}$, puesto que $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{5 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{8}{125}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos.

11.2 Propiedades de la radicación de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y m y $n \in \mathbb{N}$, entonces la radicación de números racionales cumple las propiedades que se muestran en la Tabla 1.

Raíz de un producto	Raíz de un cociente
$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\div\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
Raíz de una potencia	**Raíz de una raíz**
$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\div n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}} = \sqrt[n\cdot m]{\frac{a}{b}}$

Tabla 1

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 3

Observa cómo se aplican las propiedades de la radicación en cada caso.

a. $\sqrt[3]{\left(-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{64}\right)} = \sqrt[3]{\left(-\frac{8}{27}\right)}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)} = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}$

b. $\sqrt{\left(\frac{36}{49}\div\frac{16}{25}\right)} = \sqrt{\frac{36}{49}}\div\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{6}{7}\div\frac{4}{5} = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$

c. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{9\div 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

d. $\sqrt{\sqrt{\frac{81}{256}}} = \sqrt[2\cdot 2]{\frac{81}{256}} = \sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{3}{4}$

Ejemplo 4

Observa que $\sqrt{\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{36}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ pero $\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{36}} \neq \frac{1}{5}+\frac{1}{6}$.

Ten en cuenta

Para calcular la raíz de una expresión decimal, lo más conveniente es expresarla primero como una fracción. Por ejemplo:

$$\sqrt{0{,}04} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Calcula cada raíz y relaciónala con el valor que le corresponde.

a. $\sqrt{\frac{25}{36}}$ b. $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$ c. $\sqrt{\frac{100}{49}\cdot\frac{1}{81}}$ d. $\sqrt{\sqrt{\frac{9}{4}}}$

( ) $\frac{5}{4}$ ( ) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ( ) $\frac{5}{6}$ ( ) $\frac{10}{63}$

Solución:

(b.) $\frac{5}{4}$ (d.) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (a.) $\frac{5}{6}$ (c.) $\frac{10}{63}$

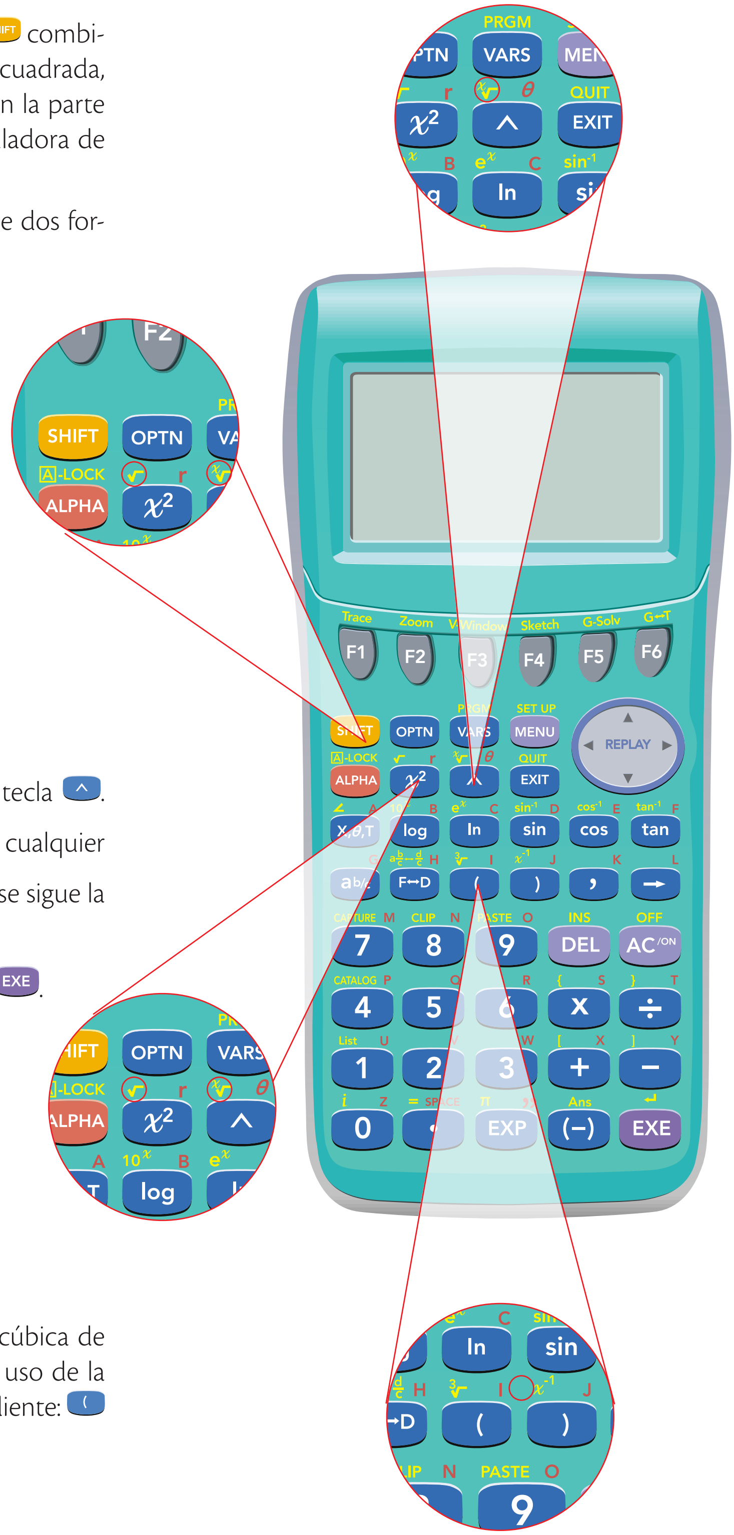
11 Radicación de números racionales

MatemaTICS

Calcula raíces con la calculadora científica

Para calcular la raíz de un número se utiliza la tecla SHIFT combinada con alguna de las teclas x^2, ^ y (. La raíz cuadrada, enésima y cúbica, respectivamente, se encuentran en la parte superior de cada tecla, como se observa en la calculadora de la derecha.

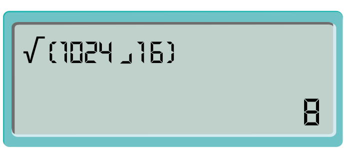
Las raíces cuadradas o cúbicas se pueden calcular de dos formas diferentes:



- Para hallar $\sqrt{\frac{1024}{16}}$, sigue la secuencia

SHIFT x^2 (1 0 2 4 a b/c 1 6) EXE.

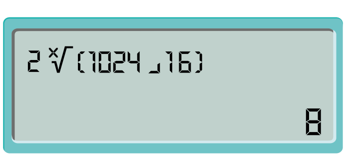
En la pantalla se observa:



- Otra forma de hallar $\sqrt{\frac{1024}{16}}$ es empleando la tecla ^. Esta tecla permite hallar el valor de una raíz para cualquier valor del índice. Para este ejemplo en particular, se sigue la secuencia

2 SHIFT ^ (1 0 2 4 a b/c 1 6) EXE.

La calculadora registra:



Procedimientos similares se usan para hallar la raíz cúbica de cualquier número, pero en este caso se debe hacer uso de la tecla SHIFT y la tecla que muestra el radical correspondiente: (

- Usa la calculadora para hallar las raíces.

a. $\sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{125}}$ **b.** $\sqrt{\frac{4}{25} \div \frac{36}{49}}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla cada raíz. Si no es posible, explica la razón.

a. $\sqrt{\frac{1}{9}}$ b. $\sqrt{\frac{64}{100}}$ c. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$

d. $\sqrt[3]{-\frac{8}{216}}$ e. $\sqrt{\frac{49}{81}}$ f. $\sqrt{-\frac{16}{36}}$

3 Calcula la raíz de las siguientes expresiones decimales.

a. $\sqrt{0,36}$ b. $\sqrt{0,04}$ c. $\sqrt[3]{0,343}$

d. $\sqrt[3]{-0,027}$ e. $\sqrt{0,0081}$ f. $\sqrt[3]{-0,008}$

4 Escribe el (los) número(s) que falta(n) en cada caso para que se cumpla la igualdad.

a. $\sqrt{\frac{\square}{64}} = \frac{5}{8}$ b. $\sqrt{\frac{121}{\square}} = \frac{11}{2}$

c. $\sqrt[3]{\frac{\square}{\square}} = \frac{2}{3}$ d. $\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\frac{3}{4}$

e. $\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\frac{5}{6}$ f. $\sqrt[4]{\frac{81}{\square}} = \frac{3}{5}$

5 Aplica las propiedades de la radicación de números racionales y resuelve.

a. $\dfrac{\left(\sqrt{\frac{81}{25}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{81}{27}\right)^3}}{\sqrt{\frac{144}{36}}}$ b. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4}}$

c. $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{144}{36}\right)^2}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$ d. $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{36}{81}\right)^2}}{\sqrt{361}}$

e. $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{16} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^0\right)}$ f. $\sqrt[3]{\frac{64}{729}} \div \frac{8}{27}$

g. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{\frac{243}{32}}\right)^3}{\sqrt{5^0}}$ h. $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{81}\right)^2}}{\sqrt{\frac{9}{16}}}$

Razonamiento

6 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. La raíz cuadrada de un número racional negativo siempre es un número racional negativo. ( )

b. La raíz cúbica de un número racional siempre es menor que su raíz cuadrada. ( )

c. La raíz cúbica de un número racional positivo siempre es un número racional positivo. ( )

d. La raíz cuadrada de un número racional positivo siempre es un número racional negativo. ( )

Resolución de problemas

7 Una caja con forma de cubo tiene un volumen de $\frac{3\,375}{8}$ cm^3. ¿Cuánto mide el lado de la caja?

8 Natalia se desplaza diariamente a su trabajo de la siguiente forma: recorre 25 km en línea recta, luego gira a su derecha 90° y recorre otros 15 km más en línea recta. Si se construyera una carretera que uniera con una línea recta la casa de Natalia con su trabajo,

a. ¿recorrería menos distancia que en la actualidad?

b. ¿cuántos kilómetros recorrería Natalia en esa nueva carretera de su casa al trabajo?

c. Comenta con tus compañeros cómo resolviste los anteriores interrogantes.

9 La diagonal d de un rectángulo se calcula con la fórmula $d = \sqrt{l^2 + w^2}$. Si se sabe que el valor de $l = 20$ y $w = 15$, ¿cuánto mide la diagonal del rectángulo?

10 ¿Cuánto mide el lado y el perímetro del terreno de la Figura 1 que es de forma cuadrada?

Área $= \frac{64}{9}$ dam^2



Figura 1

12 Operaciones combinadas con números racionales

Explora

Un bus tiene capacidad para 40 personas y hace cuatro paradas en su recorrido. En la primera parada, recoge $\frac{1}{2}$ de su capacidad; en la segunda deja a $\frac{4}{5}$ de las personas que recogió; en la tercera recoge a 8 personas, y en la última parada recoge una cantidad equivalente a la mitad de las personas que recogió en la primera parada.



- ¿Con cuántas personas llega el bus al final de su recorrido?

Para determinar cuántas personas llegan al final del recorrido, se deben efectuar uno a uno los cálculos que se indican en cada parada del bus.

Parada 1. El bus recogió $\frac{1}{2}$ de 40 personas; es decir, recogió 20 personas, ya que $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$.

Parada 2. Dejó $\frac{4}{5}$ de las 20 personas que recogió; esto es, $\frac{4}{5} \cdot 20 = 16$ personas.

Parada 3. Recogió a ocho personas.

Parada 4. Recogió a tantas personas como la mitad de las que recogió al comienzo, o sea, recogió a $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ personas.

Si se quiere saber cuántas personas llegaron a la última parada, se efectúa esta cadena de operaciones:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 40\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 20\right) + 8 + \left(\frac{1}{2} \cdot 20\right) = 20 - 16 + 8 + 10 = 22$$

Por tanto, a la última parada llegaron 22 personas.

Los **polinomios aritméticos con números racionales** son expresiones que combinan números racionales con adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces.

Para solucionar un polinomio aritmético en el que no hay signos de agrupación, se deben realizar las operaciones que lo integran en el orden que se muestra a continuación.

1. Se calculan las potencias y las raíces.
2. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha.
3. Se efectúan las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve un polinomio aritmético en el que no hay signos de agrupación.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \div \frac{7}{8} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \div \frac{7}{8} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{40}{28} - \frac{4}{3} = \frac{71}{84}$$

Si en un polinomio aritmético hay signos de agrupación, se realizan en primer lugar todas las operaciones indicadas dentro de dichos signos, comenzando por el más interno; luego, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 2

El polinomio $\frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{23}\right) + \frac{5}{8}\right]$ se resuelve así:

$$\frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{23}\right) + \frac{5}{8}\right] = \frac{3}{4} + \left[-\left(\frac{22}{69}\right) + \frac{5}{8}\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \left(-\frac{22}{69} + \frac{5}{8}\right) = \frac{3}{4} + \frac{169}{552} = \frac{583}{552}$$

CULTURA del Buen Vivir

La confianza

A la hora de resolver una operación debes confiar en tus conocimientos; así mismo, cuando tienes un conflicto con algún compañero debes confiar en el apoyo que te puedan brindar tus maestros para buscar la mejor solución.

- En tu opinión, ¿qué característica debe tener una persona para ser buena mediadora de conflictos? Comparte tu respuesta con un compañero de clase.

Destrezas con criterios de desempeño: Realizar operaciones combinadas en Q atendiendo la jerarquía de la operación.
Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 La fundación Amigos del Mañana quiere realizar un nuevo proyecto. Para ello, tiene una donación por un valor equivalente a los $\frac{4}{5}$ de \$ 12 800, y en el banco tiene unos ahorros de $\frac{1}{8}$ de los $\frac{3}{5}$ de \$ 25 400. ¿Con cuánto dinero cuenta la fundación para el proyecto?

Solución:

La expresión matemática que representa la situación y su solución se muestran a continuación.

$$\left(\frac{4}{5}\cdot 12\,800\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{5}\cdot 25\,400\right)$$

$$= (10\,240) + \left(\frac{3}{40}\right)\cdot(25\,400)$$

$$= (10\,240) + 1\,905 = 12\,145$$

La fundación cuenta con \$ 12 145 para desarrollar el nuevo proyecto.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el resultado de cada operación.

a. $\frac{2}{9} - \left[\frac{5}{4} + \left(\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)\right] + \frac{2}{3}$

b. $\left[\frac{7}{4} - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}\right)\right]^2 - \frac{1}{9}$

c. $\frac{3}{4} - \left\{\frac{2}{5} + \left[\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

d. $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\right)\right]^2$

3 Indica si cada igualdad es verdadera (V) o falsa (F).

a. $-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} \div \left(-\frac{6}{9}\right) = -\frac{67}{12}$ ( )

b. $\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{9} = \frac{29}{45}$ ( )

c. $2 - \left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{16}{27}$ ( )

d. $-\frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = -\frac{33}{8}$ ( )

e. $\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) \div \frac{3}{7} = -\frac{343}{72}$ ( )

Razonamiento

4 Coloca los paréntesis en el lugar adecuado para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $\frac{2}{6} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = -\frac{11}{24}$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \div \frac{4}{7} + \frac{3}{5} = \frac{35}{164}$

c. $\frac{3}{5} \div \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{18}{5}$

d. $\frac{2}{8} \div \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{3}{9} = \frac{11}{4}$

e. $\frac{3}{7} \div \frac{4}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{8} = -\frac{89}{140}$

Resolución de problemas

5 Samuel inicia su juego favorito "Viaje Extremo" con 60 puntos. Al superar cada uno de los cuatro niveles del juego, obtuvo los siguientes resultados: en el primer nivel logró $\frac{1}{5}$ de sus puntos de inicio, en el segundo nivel obtuvo $\frac{2}{8}$ de esos puntos, en el tercer nivel perdió el doble de los puntos que ganó en el primer nivel y en el último nivel ganó 5 puntos.

Si para ganar se requieren 100 puntos al final del último nivel, explica si Samuel lo logró.

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. La mitad de la mitad de la mitad de 480 es:

A. 60

B. 80

C. 120

D. 240

2. La mitad de la tercera parte de 60 es:

A. 30

B. 20

C. 10

D. 12

3. Para preparar galletas se necesita mezclar en un recipiente $\frac{3}{8}$ de un paquete de 880 g de harina, $\frac{1}{8}$ de un paquete de 400 g de azúcar, $\frac{1}{2}$ de un paquete de 340 g de mantequilla. El total de gramos de los ingredientes es de:

A. 500 g

B. 550 g

C. 600 g

D. 650 g

4. Diana tomó nota de la distribución del tiempo de un día corriente, obteniendo el siguiente resultado: durmió 8 horas, 6 horas pasó en el colegio, 2 horas jugó con sus primas, 3 horas vio televisión y 5 horas entre transporte, comidas y redes sociales. Estos tiempos corresponden en ese orden a las siguientes fracciones:

A. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{24}$

B. $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{3}{14}, \frac{1}{8}, \frac{6}{5}$

D. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{5}{24}$

5. Ariel recibe de su papá $ 120, gasta en un libro los $\frac{7}{24}$ de esta cantidad y se compra unos zapatos que le cuesta los $\frac{6}{5}$ de lo que le costó el libro, después de sus compras Ariel se queda con:

A. $ 35

B. $ 42

C. $ 43

D. $ 21

6. $\left[\left(-\frac{4}{15}\times\frac{5}{8}\right)\right]\div\left(-\frac{1}{6}\right)=$

A. 1

B. 0

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{15}{6}$

7. Entre tres hermanos se reparten $ 140, el primero se lleva los $\frac{3}{7}$, el segundo los $\frac{3}{5}$ de los que quedó, el tercero se quedó con:

A. $ 67

B. $ 56

C. $ 48

D. $ 32

8. $\left(\frac{4}{3}\div 1{,}3333...\right)^3+\left(3{,}25-\frac{1}{4}\right)=$

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

9. ¿Por cuál fracción hay que multiplicar $1\frac{2}{3}$ para obtener $5\frac{4}{5}$?

A. $9\frac{2}{3}$

B. $3\frac{12}{25}$

C. $3\frac{25}{12}$

D. $9\frac{3}{2}$

10. Diana tiene 120 cromos y desea repartir los $\frac{2}{3}$ en partes iguales a 10 amigos. ¿Cuántos cromos recibe cada uno?

A. 4 B. 72

C. 36 D. 8

11. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\sqrt{9}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{81}{4}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=$

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

12. Un jugador pierde los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de 360 000. ¿ Cuál es su perdida ?

A. 12 900

B. 19 200

C. 192 000

D. 9 600

13. Al resolver $3+\{\frac{3}{5}+\frac{3}{2}(\frac{5}{3}-\frac{7}{2})-2+\frac{1}{3}\}$, se obtiene:

A. $\frac{409}{70}$ B. $-\frac{49}{60}$

C. $\frac{109}{60}$ D. $\frac{69}{60}$

14. Se venden $\frac{3}{4}$ de metro de una pieza de tela de 440 m luego se vende $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba.¿Cuántos metros de tela sobró?

A. 66 m B. 33 m

C. 154 m D. 74 m

15. De un grupo de 20 amigos, a $\frac{2}{5}$ partes gustan del fútbol mientras que a $\frac{3}{4}$ del resto les gusta el tenis, ¿ a cuántos de ellos les gusta el fútbol y a cuántos el tenis?

A. fútbol 8; tenis 15 B. fútbol 8; tenis 12

C. fútbol 8; tenis 10 D. fútbol 8; tenis 9

16. El resultado de resolver $\left\{\frac{1-\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)-\sqrt{3-\frac{11}{9}}\right\}^{-2}$ es:

A. $\frac{441}{900}$ B. $\frac{-29}{30}$

C. $\frac{100}{289}$ D. $\frac{51}{30}$

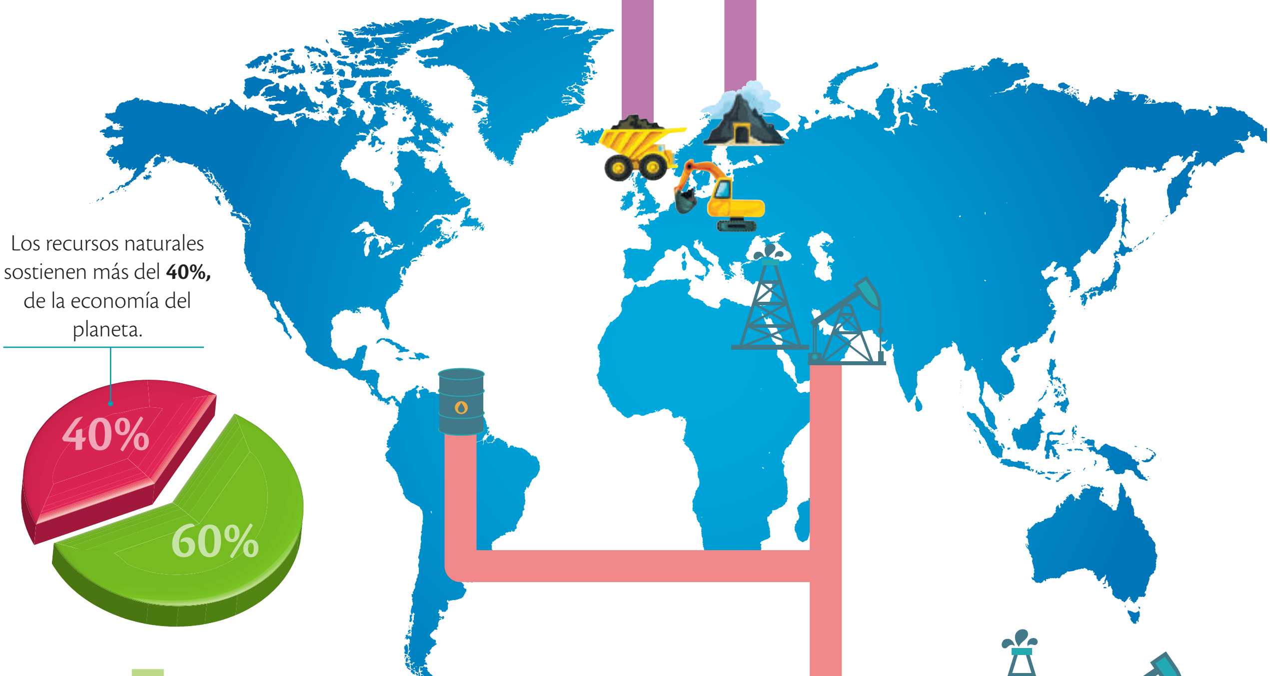
Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

La importancia de cuidar los recursos naturales

Los amplios y variados recursos naturales disponibles en cada país facilitan el crecimiento de su economía; estos recursos determinan el desarrollo de las industrias, los patrones de comercio internacional, la división del trabajo, etc.



La disponibilidad de carbón en Inglaterra y ciertas regiones de Europa fueron clave para la revolución industrial.



Los recursos naturales sostienen más del **40%,** de la economía del planeta.

A partir de esto, se puede afirmar que Los recursos naturales son importantes para la economía mundial. Son fundamentales para el progreso de la humanidad; son fuente de alimentación, de bienes y servicios, así como garantía de bienestar económico y social.

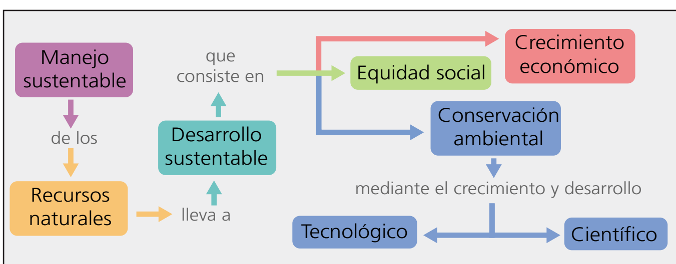


Los países árabes del golfo pérsico y Venezuela dependen de los ingresos que obtienen por la explotación de un recurso natural: el petróleo.

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1 Observa el siguiente esquema y luego, lee el texto:



Hace varios años surgió una nueva idea que vincula el concepto de "cuidado del ambiente" y "utilización de los recursos", la cual hace frente al problema de la contaminación ambiental y busca alternativas de utilización de los recursos sin degradar el ecosistema. Esta nueva acción se conoce como *manejo sustentable o sostenible de los recursos naturales*.

2 Escribe con tus palabras lo que entiendes por: "manejo sustentable" y "desarrollo sustentable".

¿Cómo cuidar los recursos naturales?

Para evitar la destrucción de la naturaleza, las personas deben aprovechar los recursos de forma racional, teniendo siempre presente que las generaciones futuras tienen derecho a disfrutar del medio ambiente.

La conservación del medio ambiente debe considerarse como un movimiento social dirigido al cuidado y protección de los animales, las plantas y el entorno natural en general. También hace referencia a la utilización racional de los recursos naturales por parte de los seres humanos, así como a evitar la contaminación, la degradación y la explotación excesiva del medio ambiente.

Siembra árboles y vegetales.

Recolecta agua de lluvia.

Cierra la llave mientras te lavas los dientes.

Recicla y clasifica las basuras.

No arrojes basura a la calle.

Ahorra papel.

No te excedas en el uso de la energía.

Reduce el uso de productos desechables.



Pregunta tipo Saber

Debido al subsidio, aunque el galón de gasolina extra se importa a $ 2,83, en Ecuador el precio oficial de venta es de $ 1,30, valores que no consideran los costos de comercialización y distribución interna. En Colombia, por ejemplo, el galón de gasolina cuesta $ 6,3.

http://www.revistalideres.ec/lideres/gasolina-extra-super-subsidio-crecio.html.



De acuerdo con la información anterior, ¿cuánto deja de recibir el estado por la venta de cada galón de gasolina extra al precio oficial?

A. aproximadamente $ 1,2

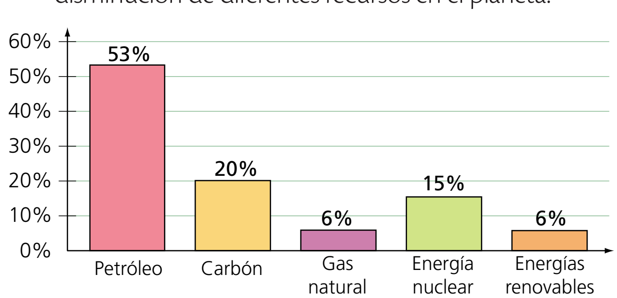
B. aproximadamente $ 1,5

C. aproximadamente $ 6,1

D. aproximadamente $ 4,8

Administración de recursos

3 Uno de los problemas más preocupantes para el mundo es que los recursos naturales se están agotando. Observa la gráfica que muestra el porcentaje de disminución de diferentes recursos en el planeta.



Trabajo en grupo

Responde con tus compañeros las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es el recurso que más se ha disminuido en el mundo?

b. De los recursos renovables y no renovables que se muestran en la gráfica, ¿cuáles tenemos en Ecuador? ¿En qué lugares de nuestro país?

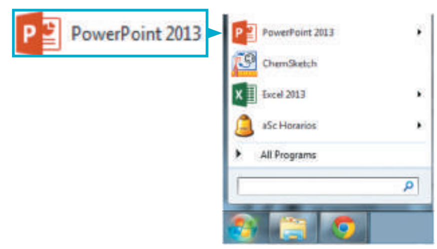
c. ¿Qué usos tienen el petróleo y el carbón en Ecuador?

Habilidades digitales

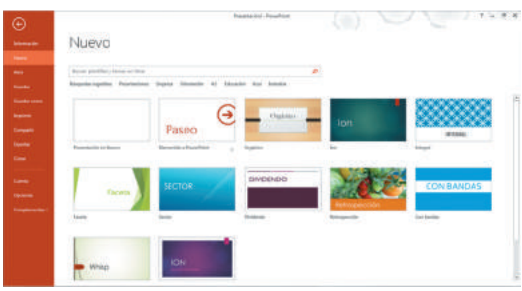
Presenta tus ideas con PowerPoint

La información que se consulta en Internet y otras fuentes puede presentarse de una manera impactante con la ayuda de PowerPoint. Este programa permite realizar presentaciones audiovisuales de manera sencilla. El éxito de una presentación se encuentra en tener imágenes acertadas, el texto preciso y el sonido apropiado. Con tus compañeros realiza una presentación insertando imágenes y sonidos y utilizando fuentes de información confiables.

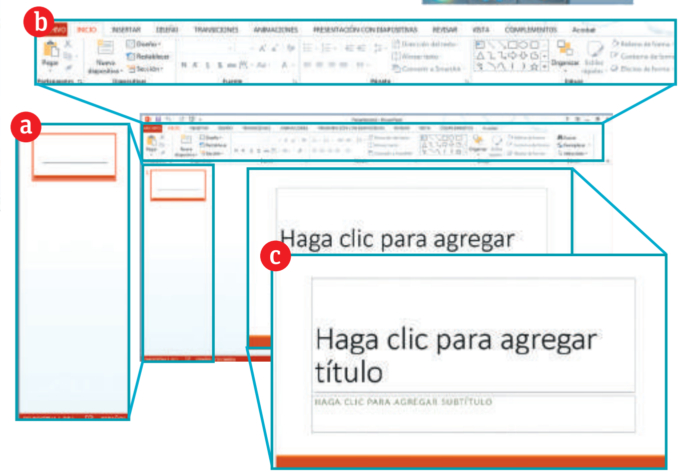
Ingresa a PowerPoint



a. Selecciona la opción para crear un *Nuevo archivo* y elige un fondo.

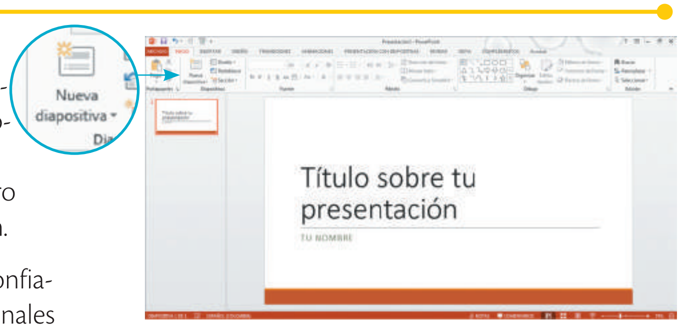


b. Reconoce el entorno del programa, que se compone de: la barra exploradora de diapositivas (a), la barra de herramientas de creación y edición (b) y el área de trabajo (c).



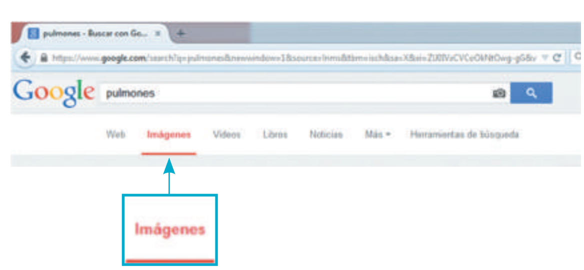
2 Crea una presentación

a. En el área de trabajo de PowerPoint escribe el título de tu presentación y tu nombre, como subtítulo. Luego, en la barra de herramientas, pulsa la opción *Nueva diapositiva* para crear el número de diapositivas que desees para tu presentación.



b. Realiza una búsqueda en Internet, en fuentes confiables sobre las aplicaciones de los números racionales en la vida cotidiana. Ten en cuenta que una fuente es confiable si procede de autores o instituciones reconocidas en el ámbito académico.

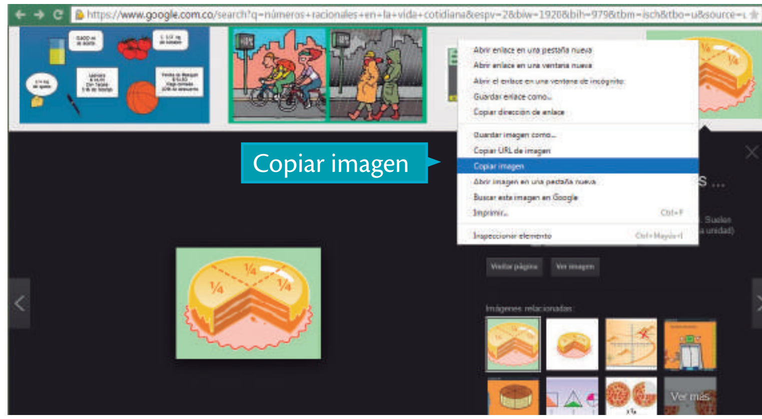
c. Busca imágenes adecuadas que permitan representar o ambientar los textos que incluyas.



3 **Copia** las imágenes que deseas utilizar directamente desde tu buscador

a. Oprime *clic derecho* sobre la imagen que deseas utilizar. Aparecerá un menú de herramientas en el que debes seleccionar la opción *Copiar imagen.*

b. Cambia a la ventana de PowerPoint y pega la imagen. Para ello, oprime la combinación de teclas *Ctrl+V* (pegar). Copia todas las imágenes que requieras



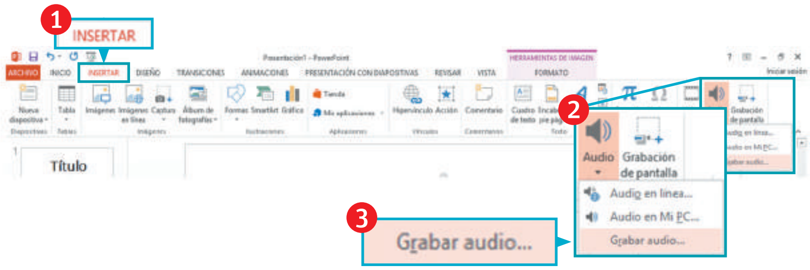
4 **Edita** tu presentación

a. Da clic sobre la imagen y aprovecha las opciones de edición de imagen en la barra de herramientas; ajústala y recórtala al tamaño que necesites.

b. Prepara un texto que describa en detalle las aplicaciones que escogiste de los números racionales.

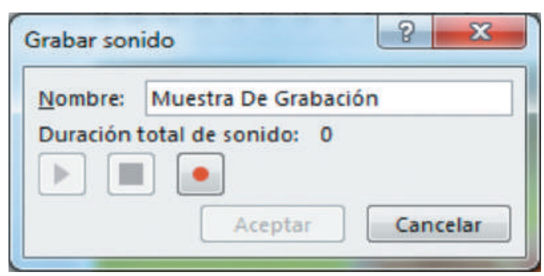
c. Graba tu voz narrando el escrito anterior, así:

1. Da clic sobre la pestaña *Insertar* y luego sobre la opción *Audio* del menú que se despliega.
2. Oprime la opción *Grabar audio.*



d. Haz clic en el punto rojo para empezar la grabación. Usa el botón para detenerla y el botón para reproducirla. Repite el proceso hasta obtener el resultado que deseas y oprime *Aceptar.*

e. Finalmente, oprime la tecla *F5* y verifica que cada diapositiva tenga los sonidos insertados.



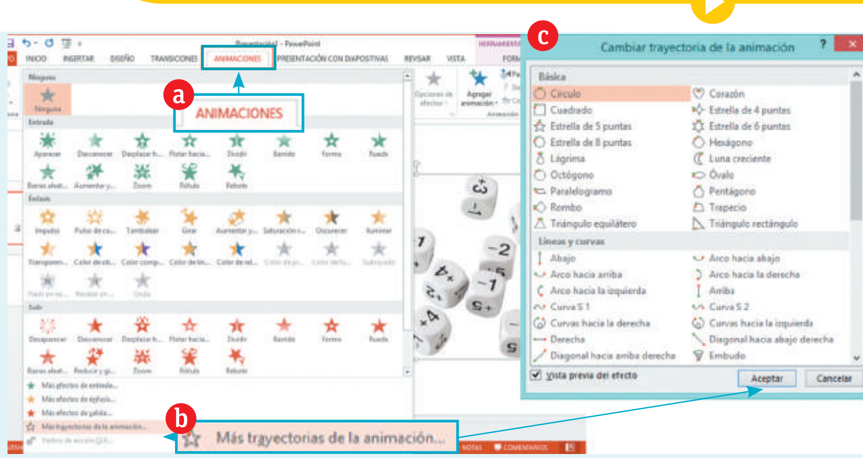
Aprende más

Dale movimiento a tu presentación.

a. Da clic sobre una imagen y luego a la pestaña *Animaciones.*

b. Escoge la opción *Más trayectorias de la animación.*

c. Prueba las trayectorías de la lista, selecciona la que más te guste y luego da clic en el botón *Aceptar.* Repite este proceso con cada imagen.



Evaluación de la unidad

Números racionales

Comunicación

1. Colorea con color verde las fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$ y con color amarillo las fracciones equivalentes a $\frac{7}{2}$.

$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{36}{60}$	$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{9}$	$\frac{35}{28}$	$\frac{77}{22}$	$\frac{24}{23}$	$\frac{52}{36}$	$\frac{48}{12}$
$\frac{24}{40}$	$\frac{40}{24}$	$\frac{64}{42}$	$\frac{36}{15}$	$\frac{56}{16}$	$\frac{90}{45}$
$\frac{5}{36}$	$\frac{84}{24}$	$\frac{27}{45}$	$\frac{25}{31}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{75}{125}$

2. Escribe en el cuadro $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a. $\frac{5}{4} \; \square \; \frac{11}{9}$

b. $\frac{1}{4} \; \square \; \frac{1}{3}$

c. $\frac{24}{16} \; \square \; \frac{3}{2}$

d. $\frac{32}{12} \; \square \; \frac{20}{6}$

e. $\frac{48}{18} \; \square \; \frac{25}{9}$

f. $\frac{51}{17} \; \square \; \frac{63}{21}$

Adición y sustracción de números racionales

Ejercitación

3. Selecciona el resultado de cada operación.

a. $\frac{51}{17} + \frac{36}{17}$

$\frac{87}{34}$ | $\frac{86}{17}$ | $\frac{87}{17}$

b. $\left(\frac{7}{4} + \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{4}$

$\frac{19}{6}$ | $\frac{38}{48}$ | $\frac{152}{24}$

c. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{6}{7} - \frac{2}{7}\right)$

$\frac{57}{56}$ | $\frac{14}{28}$ | $-\frac{57}{56}$

Resolución de problemas

4. En el curso de Juan, $\frac{2}{9}$ de los estudiantes son niños de 13 años, $\frac{1}{4}$ tienen 14 años y el resto 15 años. ¿Qué parte de los estudiantes del curso de Juan tienen 15 años?

5. Para llenar una piscina se utilizan dos mangueras: la primera vierte $\frac{3}{11}$ m^3 de agua por minuto y la otra $\frac{4}{7}$ m^3 por minuto. ¿Cuántos m^3 de agua vierten las dos llaves al cabo de un minuto?

6. Al iniciar un viaje familiar, el medidor de gasolina del carro marcaba $\frac{1}{8}$ de galón. En la primera estación se compraron $\frac{9}{2}$ galones de gasolina y en la segunda estación $\frac{11}{4}$. Cuando regresaron del viaje, el medidor marcaba $\frac{8}{9}$ de galón. ¿Cuánta gasolina se consumió durante el viaje?



7. Carlos anduvo en bicicleta $\frac{5}{12}$ del trayecto de su casa al colegio. Si el resto del recorrido lo hizo a pie, ¿qué parte del recorrido caminó Carlos?

Multiplicación y división de números racionales

Ejercitación

8. Completa cada igualdad.

a. $\frac{4}{3} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{10}{9}$

b. $\frac{2}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{\square}{\square}$

c. $\frac{9}{15} \div \frac{\square}{\square} = \frac{36}{45}$

d. $\frac{\square}{\square} \div \frac{10}{9} = \frac{21}{10}$

e. $\frac{\square}{\square} \div \frac{1}{2} = \frac{16}{3}$

f. $\frac{3}{8} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{7}{20}$

g. $\frac{13}{6} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{39}{12}$

h. $\frac{\square}{\square} \div \frac{2}{5} = \frac{25}{7}$

Indicadores de logro:
- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales.
- Aplica las operaciones con números racionales en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división, efectúa operaciones combinadas con números racionales.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.

Resolución de problemas

9. Carolina recorre $\frac{2}{5}$ de kilómetro en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Qué distancia recorre en un $\frac{1}{4}$ de hora?

10. Ana compró 200 hectáreas de una finca con la idea de construir una granja en las $\frac{3}{4}$ partes del terreno y en el resto sembrar manzanos. ¿Cuántas hectáreas le corresponden a la granja y cuántas a los árboles de manzanas?



11. Un garrafón tiene una capacidad de $\frac{28}{5}$ de litro. Si el garrafón está totalmente lleno, ¿cuántos vasos de un $\frac{1}{4}$ de litro se pueden llenar?

12. Los estudiantes de un colegio realizaron una colecta para ayudar a doce personas de bajos recursos. Si recogieron $\frac{6}{8}$ de millón e hicieron el reparto de forma equitativa, ¿cuánto dinero le correspondió a cada persona?

Potenciación y radicación de números racionales

Razonamiento

13. Determina el valor de verdad de cada igualdad y marca la casilla correspondiente.

	Verdadera	Falsa
a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$		
b. $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 = -\frac{10}{25}$		
c. $\sqrt{\frac{121}{144}} = -\frac{11}{12}$		
d. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$		
e. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^4} = \frac{5}{4}$		
f. $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^3} = 1$		
g. $\sqrt[4]{\frac{12}{16}} = \frac{3}{4}$		

Números racionales en expresión decimal

Razonamiento

14. Calcula la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales.

a. 3,5 b. 15,76
c. 0,2 d. 0,02
e. 0,432 f. 0,9
g. 0,58 h. 7,12
i. 32,5 j. 10,7

Comunicación

15. Escribe $<$ o $>$ en cada casilla, según corresponda.

a. 0,34 ▢ 0,339 b. 0,1 ▢ 0,101
c. −0,12 ▢ −0,119 d. 0,3 ▢ 0,4
e. −0,2 ▢ 0,3 f. 0,123 ▢ 0,13

Ejercitación

16. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(-0,12) + 3,45 =$ ▢
b. $8,12 \cdot (-1,2) =$ ▢
c. $(5,3 + 4,2) - (-4,67) =$ ▢
d. $(2,12 - 0,5) \cdot (5,3 + 4,2) =$ ▢
e. $(0,65 - 3,21) \cdot (-8,12) =$ ▢
f. $[(15,3 + 3,7) \cdot 2,8] - 2,9 =$ ▢

Resolución de problemas

17. Eliana trota 5,9 km en 5 días. Si en los primeros cuatro días recorre en promedio 0,96 km por día, ¿qué distancia trota Eliana en su último día de entrenamiento?

18. El perímetro de un triángulo es 34,56 cm. Si un lado mide 5,6 cm y el otro 19,34 cm, ¿cuánto mide el tercer lado del triángulo?

19. Si un automóvil mantiene una velocidad constante de 60,8 km/h, ¿qué distancia recorre en 4 horas?

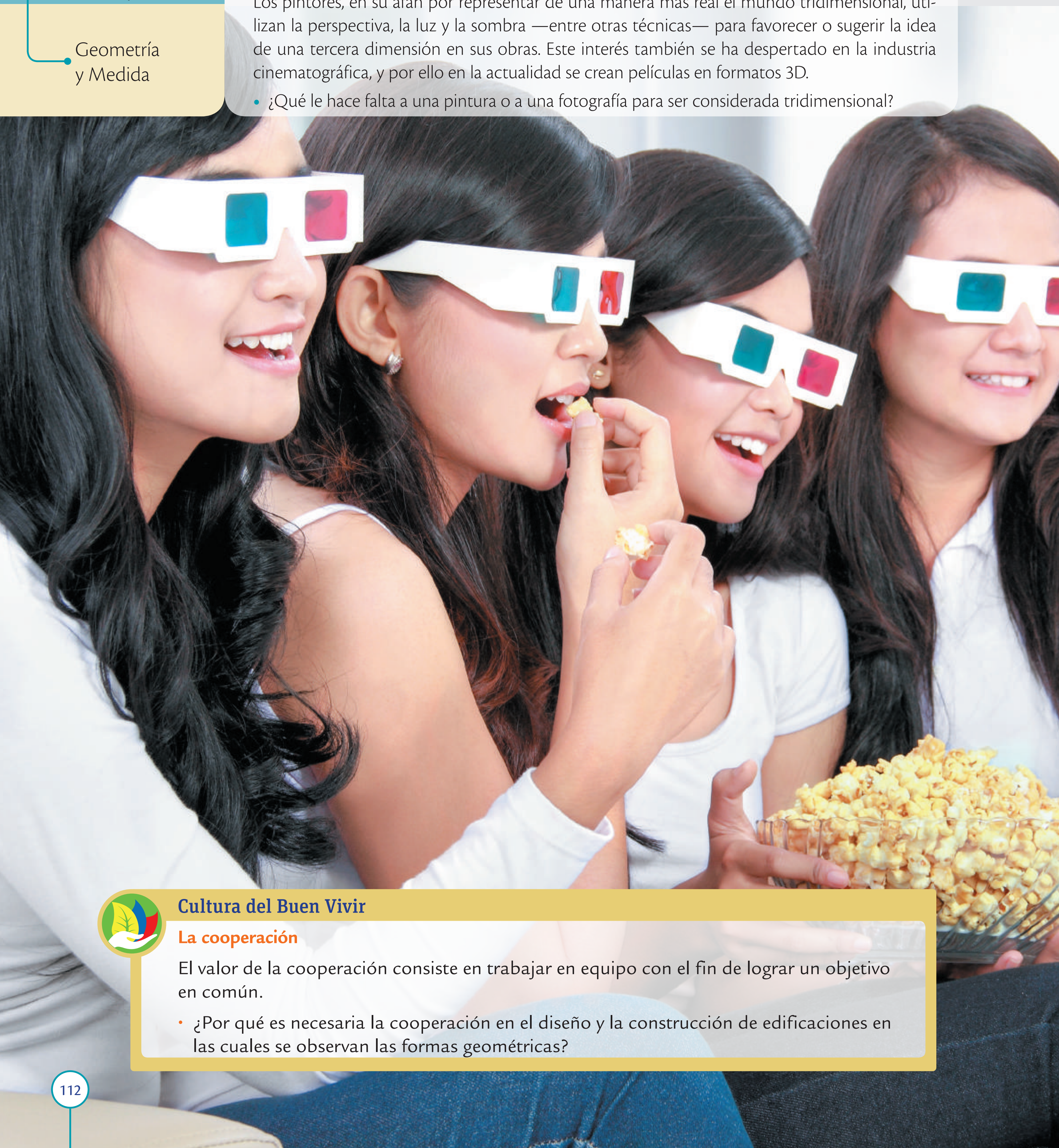
3 BLOQUE

Geometría y Medida

Cuerpos geométricos y figuras planas

Los pintores, en su afán por representar de una manera más real el mundo tridimensional, utilizan la perspectiva, la luz y la sombra —entre otras técnicas— para favorecer o sugerir la idea de una tercera dimensión en sus obras. Este interés también se ha despertado en la industria cinematográfica, y por ello en la actualidad se crean películas en formatos 3D.

- ¿Qué le hace falta a una pintura o a una fotografía para ser considerada tridimensional?



Cultura del Buen Vivir

La cooperación

El valor de la cooperación consiste en trabajar en equipo con el fin de lograr un objetivo en común.

- ¿Por qué es necesaria la cooperación en el diseño y la construcción de edificaciones en las cuales se observan las formas geométricas?

Aprenderás...

- Poliedros
- Prismas y pirámides
- Cilindros, conos y esferas
- Polígonos
- Cuadriláteros

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC
AI
E



SM Ediciones

El cine en 3D: ¿cómo funciona?

Lo que necesita nuestro cerebro para medir con éxito la distancia a un cuerpo son dos imágenes del objeto en cuestión, pero tomadas desde dos puntos diferentes. La situación privilegiada de nuestros ojos va a hacer que cada uno de ellos registre una imagen distinta, muy parecidas entre sí, pero distintas. [...]

La pregunta que ahora surge es, ¿cómo diseñar unas gafas que creen este efecto? Tenemos que conseguir que cada ojo vea una película ligeramente distinta a la que ve el otro ojo. Primero tenemos que filmar dos películas. Para ello colocaremos dos cámaras separadas unos diez centímetros (como la separación que hay entre nuestros ojos) y filmaremos la escena. Ya tenemos la película del ojo derecho y la del ojo izquierdo. Ahora hemos de pensar cómo hacer que cada ojo únicamente vea la película que le corresponde. [...]

Pero, ¿cómo podemos conseguir esto con unas gafas y con ambos ojos mirando a la misma pantalla? La respuesta reside en colocar dos filtros, uno para cada ojo, y emitir simultáneamente ambas películas, la derecha y la izquierda, de tal manera que cada filtro deje pasar al ojo sólo la película que corresponda.

Cuando vamos a un cine "3D" lo que vemos son dos películas simultáneamente, pero cada una con luz polarizada en una dirección; la luz polarizada se refleja en la pantalla (metalizada), manteniendo la polarización. Cada filtro bloqueará una polarización y dejará pasar la otra. De esta manera cada ojo verá lo que le toca ver y nuestro cerebro se sumergirá en el espectacular mundo de la visión estereoscópica. [...]

Aragoneses, Andres. (2012). Eciencia. Recuperado de: http://e-ciencia.com/blog/curiosidades/el-cine-en-3d/

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuál es la función de las gafas polarizadas?

Argumenta

2. ¿Por qué es necesario filmar dos películas para generar el efecto 3D?
3. En la actualidad se hace referencia a salas de cine 4D y hasta 7D. ¿Realmente se puede hablar de siete dimensiones? Explica.

Propón

4. Busca unas gafas 3D, observa el animal de la fotografía y describe lo que observas.

1 Poliedros

Explora

En las narraciones de partidos de fútbol, usualmente los comentaristas se refieren al balón como "al esférico"; sin embargo, la realidad es que este balón no es totalmente esférico, sino que está limitado por polígonos.

- ¿Qué tipo de polígonos forman un balón de fútbol?

El balón de fútbol es un cuerpo geométrico de 32 caras poligonales, doce pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares, que se curvan cuando el balón está bien inflado. Las 32 caras de este cuerpo se obtienen al truncar un cuerpo geométrico llamado icosaedro, el cual está formado por 20 triángulos equiláteros (Figura 1).

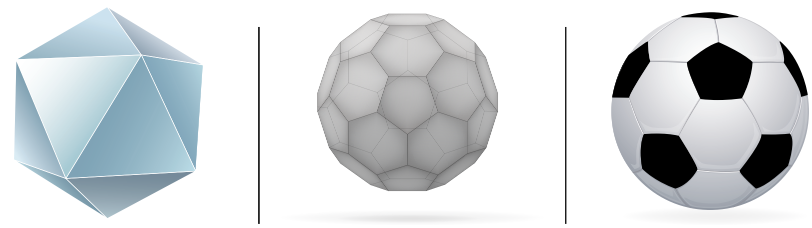


Figura 1

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos.

En la Figura 2 se identifican los elementos de un poliedro.

- Las **caras**, que son los polígonos que lo limitan.
- Las **aristas**, que son los lados de las caras.
- Los **vértices**, que son los puntos donde concurren tres o más caras.

Elementos de un poliedro

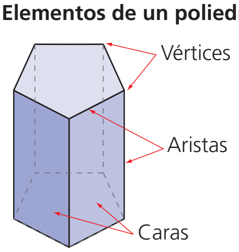


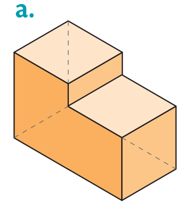
Figura 2

Los poliedros se clasifican según la medida de sus ángulos en **convexos**, si todos sus ángulos diedros son convexos, y en **cóncavos**, si alguno de sus ángulos diedros es cóncavo.

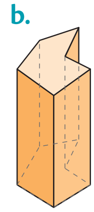
Ejemplo 1

En las figuras 3 y 4 se observan dos poliedros cóncavos, y en las figuras 5 y 6 dos poliedros convexos.

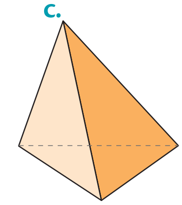
a.


Figura 3

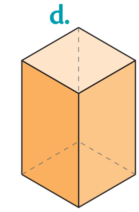
b.


Figura 4

c.


Figura 5

d.


Figura 6

En los poliedros convexos existe una relación entre el número c de caras, el número v de vértices y el número a de aristas:

$$c + v = a + 2$$

Esta igualdad se llama **relación de Euler**.

Ten en cuenta

Las cajas en las que se empacan algunos productos de la canasta familiar tienen forma de poliedros.



Actividad resuelta

Ejercitación

1 Comprueba que los poliedros de las figuras 7 y 8 cumplen la relación de Euler.

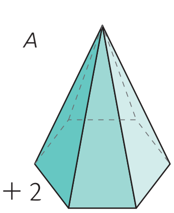


Figura 7

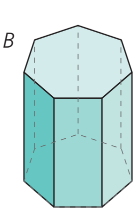


Figura 8

Solución:

Poliedro A: $c + v = a + 2 \Rightarrow 7 + 7 = 12 + 2$

Poliedro B: $c + v = a + 2 \Rightarrow 9 + 14 = 21 + 2$

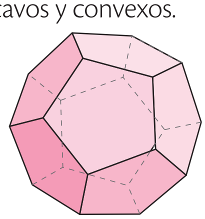
Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

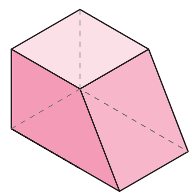
Desarrolla tus destrezas

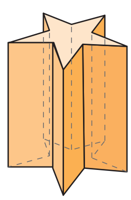
Ejercitación

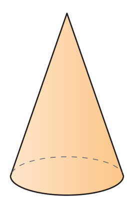
2 Identifica en tu salón de clase tres objetos que tengan forma de poliedro convexo y comprueba que se cumple la relación de Euler en cada uno de ellos.

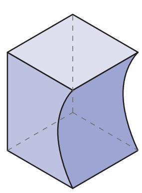
3 Indica cuáles de los cuerpos geométricos de las figuras 9 a 14 son poliedros. En caso de serlo, clasifícalos en cóncavos y convexos.

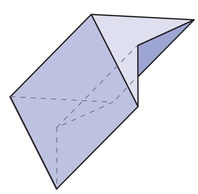
a. 
Figura 9

b. 
Figura 10

c. 
Figura 11

d. 
Figura 12

e. 
Figura 13

f. 
Figura 14

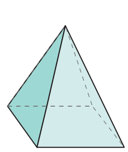
4 Completa la Tabla 1 con los elementos de poliedros convexos. Utiliza la relación de Euler.

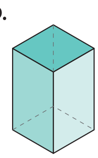
Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
6		12
16	10	
5		9
	14	24
8		18
	7	12

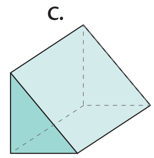
Tabla 1

Razonamiento

5 Comprueba la relación de Euler para cada poliedro de las figuras 15 a 17.

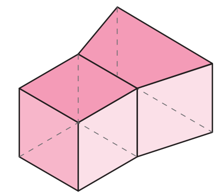
a. 
Figura 15

b. 
Figura 16

c. 
Figura 17

Comunicación

6 Observa el poliedro de la Figura 18.


Figura 18

a. ¿Cómo está formado este poliedro?

b. Comprueba si se cumple o no la relación de Euler.

7 Determina si un poliedro convexo puede tener

a. ocho caras, diez aristas y ocho vértices.

b. cinco caras, cinco aristas y cinco vértices.

c. quince caras, veinte aristas y diez vértices.

d. cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas.

8 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. En un poliedro, el menor número de aristas que concurren en un vértice es tres. ( )

b. Para cualquier poliedro el número de caras, vértices y aristas siempre es par. ( )

c. En cada vértice de un poliedro siempre concurren el mismo número de aristas. ( )

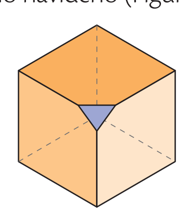
d. El número de aristas de un poliedro siempre es mayor que el número de vértices. ( )

Resolución de problemas

9 Dos **poliedros son conjugados** cuando tienen el mismo número de aristas y el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y viceversa.

Dibuja dos poliedros conjugados.

10 Carolina recortó uno de los vértices de un cubo para construir un adorno navideño (Figura 19).


Figura 19

Si continúa recortando todas las esquinas del cubo,

a. ¿cómo estará formado el poliedro obtenido?

b. ¿en el nuevo poliedro se cumple la relación de Euler? Comprueba.

2 Prismas

Explora

María desea construir una caja para empacar el regalo que le dará a su hermano en su cumpleaños; para ello, recortó un cartón en la forma que lo indica la Figura 2.

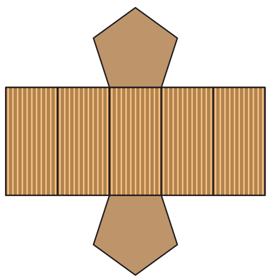


Figura 2

- ¿Qué poliedro obtendrá al construir el empaque? ¿Cómo son sus caras?

Al doblar y pegar el cartón se obtiene el prisma de la Figura 1, el cual está formado por dos pentágonos congruentes y cinco rectángulos congruentes. Como los pentágonos son las bases del prisma, el poliedro obtenido recibe el nombre de **prisma pentagonal**.

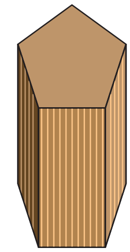


Figura 1

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos polígonos congruentes y paralelos que se llaman **bases**. Las caras restantes son paralelogramos, y se denominan **caras laterales**. La distancia entre las bases es la **altura** del prisma.

Los prismas se nombran según el polígono de sus bases como triangular, rectangular, pentagonal, hexagonal, etc., y se clasifican en **rectos**, si todas sus caras laterales son rectángulos, u **oblicuos**, si alguna de las caras laterales no es un rectángulo.

Ejemplo 1

En las figuras 3 y 4 se observan dos prismas hexagonales, uno recto y otro oblicuo, respectivamente. La altura del prisma recto coincide con las aristas laterales, mientras que la altura del prisma oblicuo es menor que la longitud de las aristas, ya que en los prismas oblicuos las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

a.

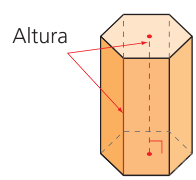


Figura 3

b.

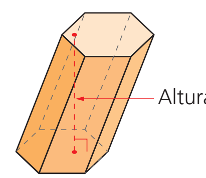


Figura 4

Ten en cuenta

Un prisma es **convexo** si el polígono de sus bases es convexo. En caso contrario, el prisma es **cóncavo**.

Los prismas también se pueden clasificar según la forma de sus caras laterales y según la forma de sus bases, tal como se muestra a continuación.

1. Si la base es o no un polígono regular.

En los **prismas regulares** se distinguen dos elementos nuevos: la **apotema**, que es el segmento que une el centro de la base con el punto medio de uno de los lados de dicha base, y el **radio**, que es un segmento que une el centro de la base con un vértice de la misma (Figura 5).

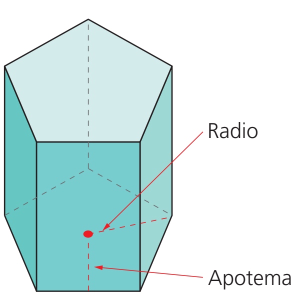


Figura 5

2. Si las bases son o no paralelogramos.

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas caras, incluidas las bases, son todas paralelogramos. Según el tipo de paralelogramo que formen sus caras, los paralelepípedos se clasifican como se muestra en las figuras 6 a 9.

Ortoedro

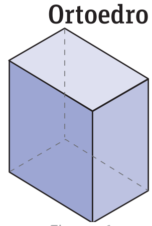


Figura 6

Las caras son rectángulos.

Romboiedro

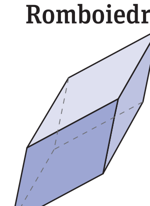


Figura 7

Las caras son romboides.

Romboedro

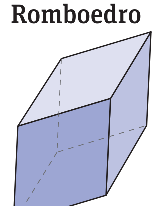


Figura 8

Las caras son rombos.

Cubo

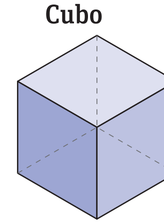


Figura 9

Las caras son cuadrados.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.mundoprimaria.com/juegos/matematicas/figuras-geometricas/3-primaria/132-juego-figuras-geometricas-caras/index.php

Obtén más información acerca de los prismas y sus desarrollos.

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Nombra los prismas de las figuras 10 a 12 y clasifícalos.

a.

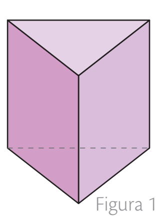


Figura 10

b.

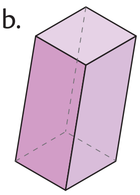


Figura 11

c.

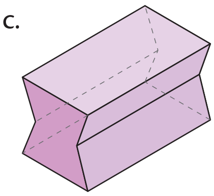


Figura 12

Solución:

a. Prisma triangular convexo y recto.

b. Prisma cuadrangular convexo y oblicuo.

c. Prisma hexagonal cóncavo y recto.

Ten en cuenta

A la reunión de las caras laterales de un prisma se le denomina **superficie lateral**; mientras que a la reunión de las caras laterales y las dos bases de un prisma se le conoce como **superficie total**.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Clasifica cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera (V) o falsa (F).

a. En todo prisma regular, la longitud de la apotema es menor que la longitud del radio. ( )

b. La altura de un prisma es una arista del prisma. ( )

c. Si un prisma es recto, todas las aristas laterales son iguales. ( )

Ejercitación

3 Calcula la suma de las medidas de los ángulos de las caras que concurren en los vértices indicados en las figuras 13 y 14. Ten en cuenta que los prismas son regulares y sus caras laterales son rectángulos.

a.

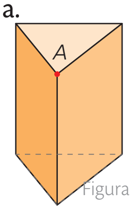


Figura 13

b.

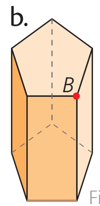


Figura. 14

Comunicación

4 Determina qué prisma se forma con los desarrollos en el plano de las figuras 15 y 16.

a.

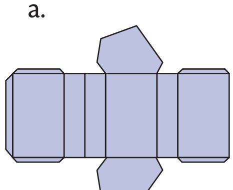


Figura 15

b.

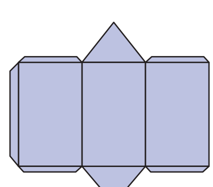


Figura 16

Razonamiento

5 Calcula el número de caras de un prisma que tiene doce aristas y ocho vértices. Luego, responde.

a. ¿Es posible saber qué prisma es?

b. Si todas sus caras son rombos, ¿Cómo se llama el prisma?

Resolución de problemas

6 Un envase tetrapack de leche mide 10 cm de largo, 6,5 cm de ancho y 16,5 cm de alto. En un paquete se empacan seis de ellos.



Figura 17

a. ¿Qué cuerpo geométrico forma el paquete?

b. Dibuja el desarrollo en el plano del paquete e indica sus dimensiones.

7 Para la semana de la ciencia, Pilar y sus compañeros de clase van a construir poliedros con los que decorarán el aula. ¿Cómo deben dibujar el desarrollo en el plano de los siguientes poliedros?

a. Un prisma cuadrangular de base 5 cm.

b. Un tetraedro de 8 cm de lado.

c. Un cubo de 6 cm de lado.

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

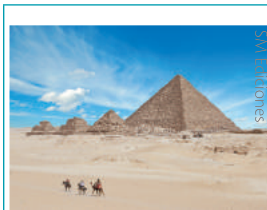
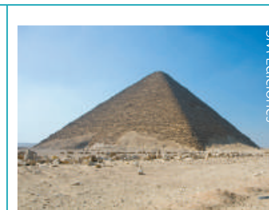
3 Pirámides

Explora

En la antigüedad, diversas civilizaciones construyeron pirámides principalmente con fines religiosos o funerarios.

- ¿Qué características en común tienen estas construcciones?

Algunas de las pirámides más antiguas y conocidas son las pirámides de Guiza, la pirámide Cestia y la pirámide Roja.

		
Pirámides de Guiza (Egipto)	Pirámide Cestia (Roma)	Pirámide Roja de Seneferu (Egipto)

En las fotografías se observa que estas construcciones tienen cinco vértices, ocho aristas, una base cuadrada y cuatro triángulos que corresponden a sus caras laterales.

Una **pirámide** es un poliedro cuya **base** está determinada por un polígono y sus **caras laterales** están formadas por triángulos que concurren en un mismo punto llamado **vértice**.

Elementos de una pirámide

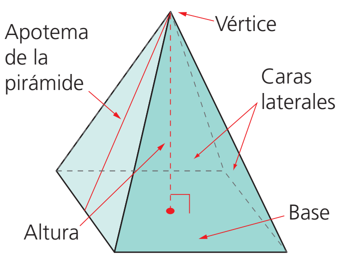


Figura 1

En la Figura 1 se observan los elementos de una pirámide de base cuadrangular.

- La base es un cuadrado, y sus cuatro caras laterales son triángulos isósceles que concurren en el vértice.
- La **altura de la pirámide** es la medida del segmento perpendicular que va de su vértice a su base.
- La **apotema de la pirámide** es la altura de cada una de las caras laterales de la pirámide.

3.1 Clasificación de las pirámides

Las pirámides se pueden clasificar como triangulares, rectangulares, pentagonales, hexagonales, etc., o en **cóncavas** y **convexas**, según el tipo de polígono de la base. También pueden ser **rectas**, si sus caras laterales son triángulos isósceles, u **oblicuas**, si alguna de las caras no es un triángulo isósceles.

Ten en cuenta

La pirámide del Sol, descubierta en el 2005, es la más grande del mundo. Esta se encuentra en Bosnia-Herzegovina y su altura es de 220 m.

Ejemplo 1

En las figuras 2 a la 4 se muestran una pirámide triangular, una pirámide hexagonal y una pirámide pentagonal, respectivamente.

a.

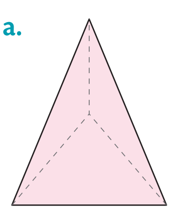


Figura 2

b.

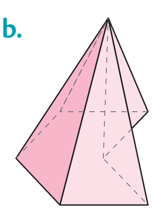


Figura 3

c.

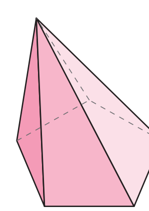


Figura 4

3.2 Troncos de pirámide

Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base y se le quita la parte de arriba, el cuerpo resultante es un **tronco de pirámide** (Figura 5).

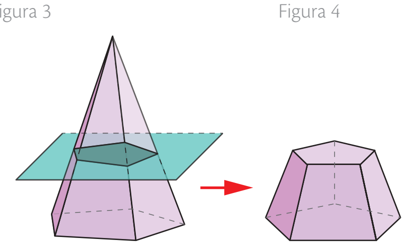


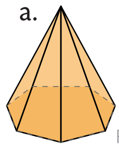
Figura 5

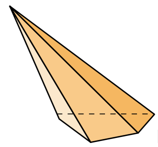
Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

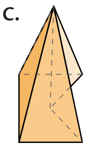
Actividad resuelta

Comunicación

1 Nombra las pirámides de las figuras 6 a 8 y clasifícalas según sean cóncavas o convexas, rectas u oblicuas.

a.

Figura 6

b.

Figura 7

c.

Figura 8

Solución:

a. Pirámide heptagonal, convexa y recta.

b. Pirámide cuadrangular, convexa y oblicua.

c. Pirámide pentagonal, cóncava y recta.

CULTURA del Buen Vivir

La cooperación

Las personas que cooperan siempre actúan pensando en un bien común, dejando de lado sus intereses particulares.

- Menciona un acto de cooperación que sea importante en tu familia.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

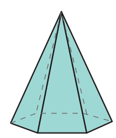
2 Relaciona cada pirámide con la descripción que le corresponde.

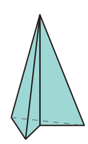
Pirámide hexagonal, convexa y oblicua.

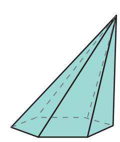
Pirámide hexagonal, convexa y recta.

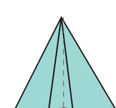
Pirámide pentagonal, cóncava y recta.

Pirámide cuadrangular, cóncava y recta.


Figura 9

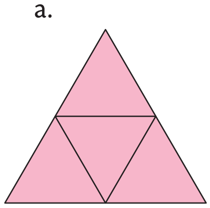

Figura 10

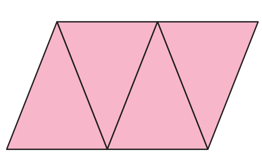

Figura 11


Figura 12

Razonamiento

3 Determina qué tipo de pirámide resulta de los desarrollos de las figuras 13 y 14.

a.

Figura 13

b.

Figura 14

Ejercitación

4 Completa la Tabla 1.

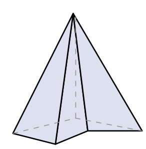
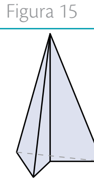
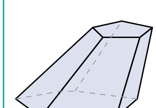
	N.º de aristas	N.º de vértices	N.º de caras
 Figura 15			
 Figura 16			
 Figura 17			

Tabla 1

Resolución de problemas

5 Miguel y Felipe fueron de campamento el fin de semana. Miguel asegura que la carpa tiene forma de pirámide, mientras que Felipe afirma que tiene forma de prisma. A partir de la Figura 18, decide quién tiene la razón. Justifica tu respuesta.


Figura 18

4 Poliedros regulares

Explora

Los poliedros regulares convexos se conocen también como sólidos platónicos, pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por parte de Platón. Este filósofo asoció los poliedros regulares con los cuatro elementos de la naturaleza y con el universo.

- ¿Cuáles son los cinco sólidos platónicos y con cuál elemento fueron asociados en la antigüedad?

Ten en cuenta

Salvador Dalí pintó en 1995 en un dodecaedro una representación moderna de la obra de Leonardo da Vinci conocida como *La Última Cena*.

App

Poliedros

Abre la aplicación *iCross Lite* y observa los elementos de algunos poliedros.



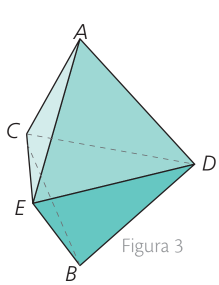
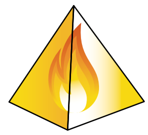
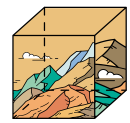
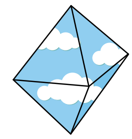


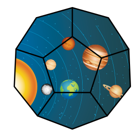
Figura 3

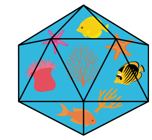
Los cinco sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. A continuación se muestra una representación de los cinco poliedros regulares convexos realizada por Johannes Kepler, con su respectiva asociación con los elementos que forman el universo.


Tetraedro (Fuego)


Cubo (Tierra)


Octaedro (Aire)


Dodecaedro (Universo)


Icosaedro (Agua)

Un **poliedro** es **regular convexo** si todas sus caras son polígonos regulares congruentes, sus ángulos diedros también son congruentes, y en cada vértice concurre el mismo número de caras y de aristas.

Ejemplo 1

Las características y elementos de cada poliedro regular se enuncian en la Tabla 1.

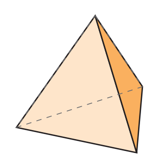
Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras
Tetraedro	Triángulo equilátero	6	4	4
Cubo	Cuadrado	12	8	6
Octaedro	Triángulo equilátero	12	6	8
Dodecaedro	Pentágono regular	30	20	12
Icosaedro	Triángulo equilátero	30	12	20

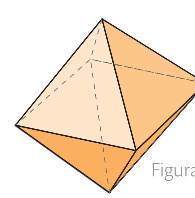
Tabla 1

Ejemplo 2

Los poliedros que se observan en las figuras 1 y 2 son convexos regulares porque:

1. Las caras de ambos poliedros son polígonos regulares congruentes. En este caso, son triángulos equiláteros.
2. En todos los vértices concurre el mismo número de caras y de aristas. En la Figura 1, en cada vértice concurren tres caras y tres aristas, mientras que en la Figura 2 en cada vértice concurren cuatro caras y cuatro aristas.


Figura 1


Figura 2

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Comprueba que el poliedro de la Figura 3 no es regular.

Solución:

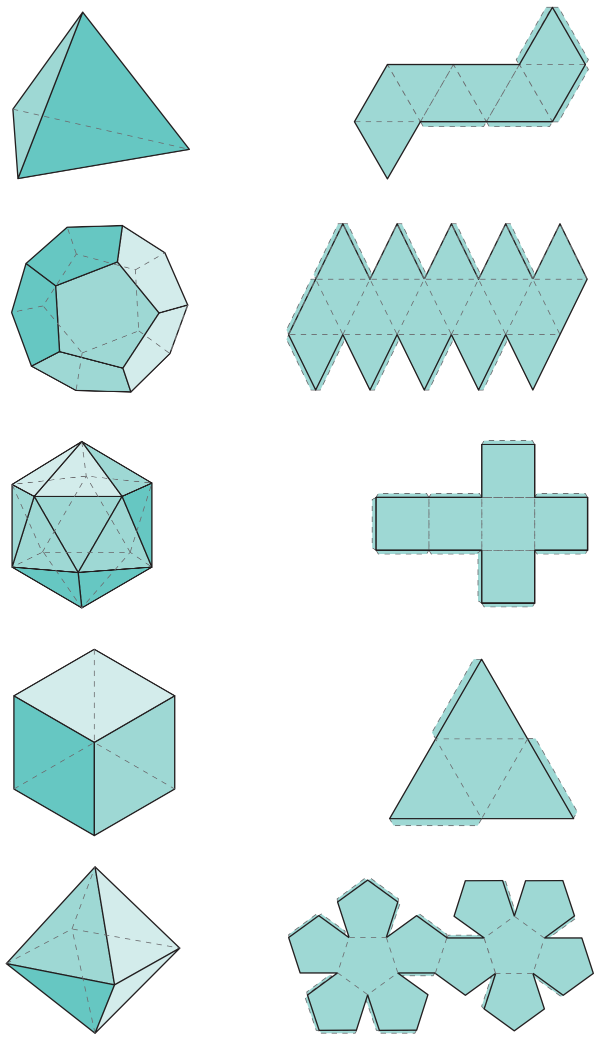
Las seis caras del poliedro son triángulos equiláteros congruentes; sin embargo, no es un poliedro regular porque en los vértices *A* y *B* concurren tres aristas y tres caras, mientras que en los demás vértices concurren cuatro aristas y cuatro caras.

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Desarrolla tus destrezas

Modelación

2 Une con una línea cada poliedro regular con su respectivo desarrollo en el plano.



Comunicación

3 Explica por qué no son regulares los poliedros de las figuras 4 y 5.

a.

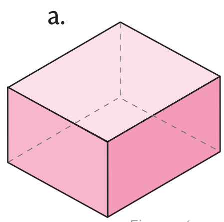


Figura 4

b.

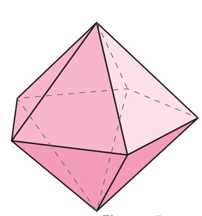


Figura 5

4 Responde las preguntas.

a. ¿Se puede obtener un poliedro regular uniendo dos pirámides cuadrangulares por sus bases?

b. Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué poliedro se obtiene?

Modelación

5 Dibuja tres desarrollos diferentes de un tetraedro.

Razonamiento

6 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Existe un poliedro regular cuyas caras son hexágonos. ( )

b. El poliedro regular formado por el mayor número de triángulos equiláteros es el icosaedro. ( )

c. En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras. ( )

d. Toda pirámide de base triangular es un poliedro regular. ( )

7 Lee y resuelve.

Si se realizan cortes planos y a la misma distancia de cada vértice de un sólido platónico, se obtienen los **sólidos truncados**. En la Figura 6 se observa el **tetraedro truncado**.

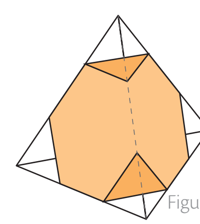


Figura 6

a. ¿El tetraedro truncado es un poliedro regular? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el tetraedro truncado?

c. Describe las caras del tetraedro truncado.

d. Explica la relación entre el núme ro de caras, vértices y aristas del tetraedro y los elementos del tetraedro truncado.

e. Dibuja el desarrollo del tetraedro truncado.

Resolución de problemas

8 La fluorita es un mineral utilizado en el proceso de fundición del hierro y del acero, y al cristalizarse se encuentra en la naturaleza adoptando diferentes formas poliédricas. Indica el tipo de poliedro que es la fluorita de la Figura 7.



Figura 7

Poliedros

Ejercitación

3. Observa en la Figura 3 el desarrollo en el plano de un poliedro. Responde las preguntas.

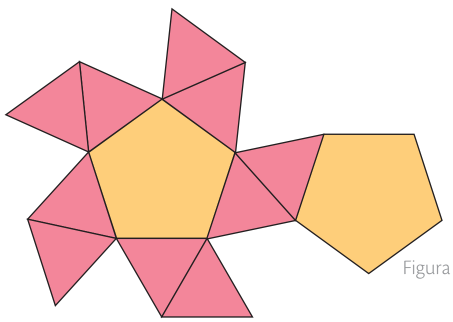


Figura 1

a. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el poliedro?

b. ¿El poliedro es convexo o cóncavo? Explica por qué.

Modelación

4. Lee y responde.

En la Figura 4, el plano β divide al cubo en dos poliedros congruentes. ¿Cuántos planos diferentes que cumplan la misma condición se pueden dibujar en el cubo?

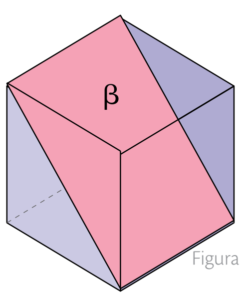


Figura 2

Prismas y pirámides

Razonamiento

5. Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F).

a. Un prisma pentagonal tiene siete caras regulares. ( )

b. Un prisma octogonal tiene 24 aristas. ( )

c. Las caras laterales de un prisma son paralelas a sus bases. ( )

d. Las caras laterales de un prisma sonrectangulares. ( )

e. La base de un prisma es un polígono regular. ( )

Ejercitación

6. Dibuja el desarrollo de cada una de las pirámides.

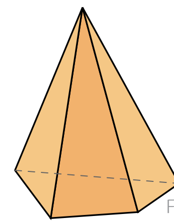


Figura 3

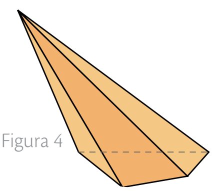


Figura 4

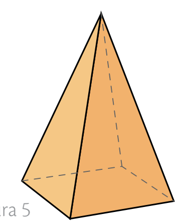


Figura 5

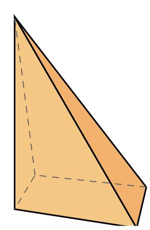


Figura 6

Poliedros regulares

Razonamiento

7. Observa el poliedro semirregular, de la Figura 6. Determina qué características en común tiene con los poliedros regulares.

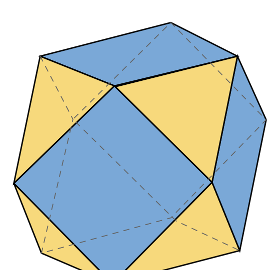


Figura 7

Resolución de Problemas

Estrategia: Deducir una fórmula

Problema

Observa los prismas de la Figura 1. A partir de ellos responde: ¿cuántas aristas, vértices y caras tiene un prisma cuya base tiene *n* lados?

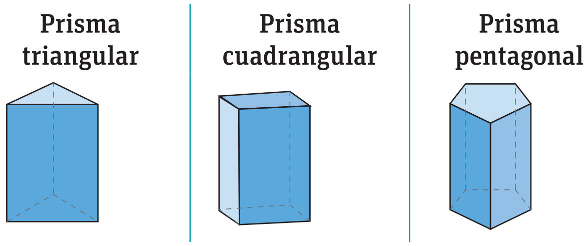


Figura 1

1. Comprende el problema

- ¿Cuántos lados tienen las bases de los prismas que se muestran en la Figura 1?
  R: Tienen tres, cuatro y cinco lados, respectivamente.
- ¿Qué ocurre con el número de caras, vértices y aristas de un prisma cuando se aumenta el número de lados de la base?
  R: Los elementos del prisma también aumentan.

2. Crea un plan

- Resuelve casos particulares y registra las soluciones en una tabla.
- Identifica regularidades entre los datos registrados y exprésalas mediante una fórmula.

3. Ejecuta el plan

- Completa la Tabla 1.

Número de lados de la base	Aristas	Vértices	Caras
3	9	6	5
4	12	8	6
5	15	10	7
6	18	12	8

Tabla 1

- Identifica patrones entre los datos anteriores.
  Las aristas de un prisma se obtienen multiplicando por 3 el número de lados de la base; los vértices, multiplicando por 2 y el número de caras, sumando 2.
  R: Un prisma de base *n* lados tiene $3n$ aristas, $2n$ vértices y $n + 2$ caras.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que un prisma cuya base es un dodecágono tiene 36 aristas, 24 vértices y 14 caras.

Aplica la estrategia

1. ¿En cuántas partes queda dividida una hoja de papel si se trazan *n* rectas que se cortan entre sí en el mismo punto? (Figura 2)

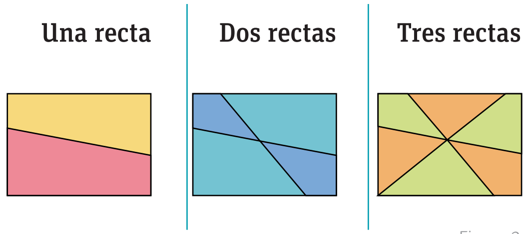


Figura 2

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Observa el desarrollo de un dado en la Figura 3.
¿Cuánto suman los números que se ubican en las caras opuestas de un cubo?

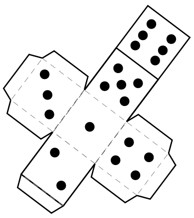


Figura 3

3. Un carpintero recibe en su taller 20 piezas de madera, como la de la Figura 4. Si las ubican una sobre otra, de tal manera que coincidan en sus vértices, ¿qué sólido forman las 20 piezas?



Figura 4

Formula problemas

4. Inventa un problema que involucre a la Figura 5.

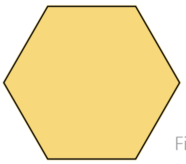


Figura 5

5 Cuerpos redondos

Explora

Algunas construcciones arquitectónicas y varios objetos de la cotidianidad tienen forma de **cuerpo redondo**.

- ¿Cuáles son los cuerpos redondos más conocidos? ¿Qué construcciones u objetos tienen tales formas?

Los cuerpos redondos más conocidos son: el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**. En la Tabla 1 se observan algunas edificaciones y objetos que tienen forma de estos cuerpos redondos.

Cuerpos redondos			
	Cilindro	Cono	Esfera
Lugares	 Torre de Pisa – Italia	 Los "Trulli" de Alberobello – Italia	 SkyView – Londres
Objetos	 Cajas de atún	 Conos de tránsito	 Balones y pelotas

Tabla 1

Los cuerpos redondos son sólidos que tienen al menos una cara curva. También se denominan **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una figura plana alrededor de una recta que se llama **eje de rotación** o **eje de giro**.

Ten en cuenta

En un cilindro, la superficie que forma la generatriz al girar recibe el nombre de **superficie lateral** del cilindro.

5.1 Cilindros

Un **cilindro recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

En la Figura 1 se observa el rectángulo *ABCD* y el cilindro recto que se obtiene al girar el rectángulo alrededor del lado $\overline{CD}$.

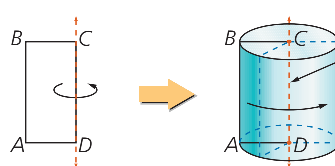


Figura 1

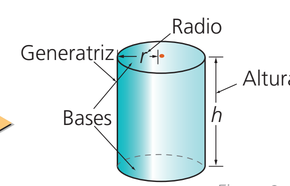


Figura 2

En un cilindro se distinguen los siguientes elementos:

- Los círculos que generan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son las **bases**.
- Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son los **radios**.
- La distancia entre las bases, que coincide con el lado $\overline{CD}$, es la **altura**.
- El lado $\overline{AB}$ se denomina **generatriz**.

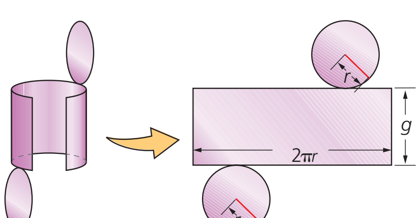


Figura 3

Ejemplo 1

El desarrollo en el plano del cilindro se obtiene separando las bases y cortando la superficie lateral por la generatriz. En este desarrollo se obtienen dos círculos y un rectángulo (Figura 3).

La base del rectángulo es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, es decir, $2\pi r$. La altura del rectángulo es la longitud de la generatriz, esto es, g.

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Ejemplo 2

Un cilindro se construyó haciendo girar un rectángulo de 5 cm de largo por 12 cm de ancho alrededor del lado más largo. Se obtuvo así la Figura 4, cuya generatriz mide 12 cm y la longitud de la circunferencia de su base es 10π cm.

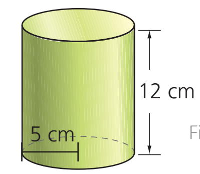


Figura 4

5.2 Conos

Un **cono recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

En la Figura 5 se observa el triángulo *BAC* rectángulo en el $\measuredangle A$, que gira alrededor de su cateto $\overline{CA}$.

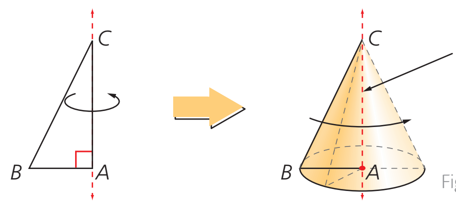


Figura 5

De la Figura 5 se pueden deducir los elementos de un cono, especificados en la Figura 6:

- El punto *C* es el **vértice** del cono.
- El círculo generado por el lado $\overline{AB}$ se llama **base**.
- El lado $\overline{AB}$ es el **radio**.
- La **altura** $\overline{AC}$ es la distancia del vértice a la base.
- La hipotenusa $\overline{BC}$, en cualquiera de sus posiciones, es la **generatriz**.
- La superficie que genera la hipotenusa es la **superficie lateral**.

Elementos de un cono

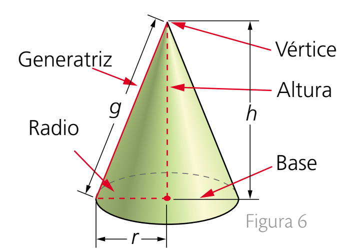


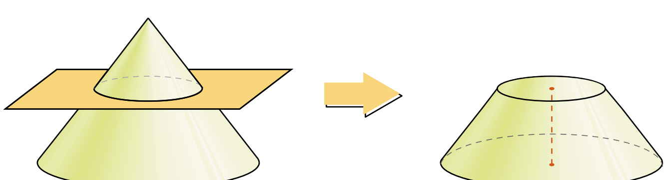
Figura 6

Ten en cuenta

La generatriz de un cono se halla mediante la expresión $g = \sqrt{h^2 + r^2}$, donde *h* es la altura y *r* el radio del cono.

5.3 Troncos de cono

Si se corta un cono por un plano paralelo a la base y se quita la parte de arriba se obtiene un **tronco de cono** (Figura 7).


Figura 7

El tronco de cono también puede obtenerse al girar un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las **bases**. En la Figura 8 se observan las dos bases circulares del tronco de cono obtenido al girar el trapecio *ABCD* alrededor del lado $\overline{CB}$ (que es la **altura** del tronco), la **generatriz** $\overline{AD}$ y los **radios** de sus bases ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).

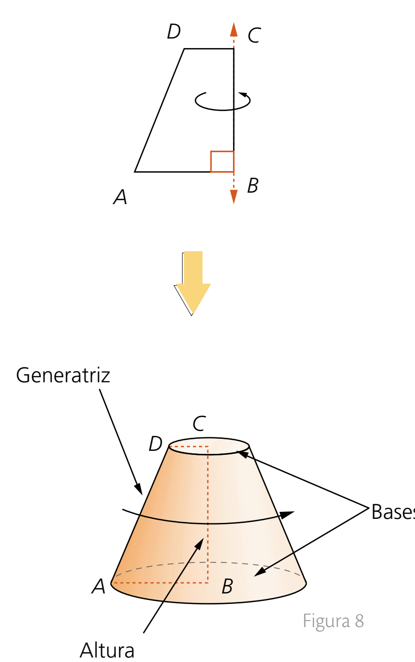


Figura 8

Ejemplo 3

Al cortar el cono de la Figura 9 con un plano paralelo a la base 2,5 cm abajo del vértice, se obtiene un tronco de altura 5,5 cm, ya que 8 cm − 2,5 cm = 5,5 cm.

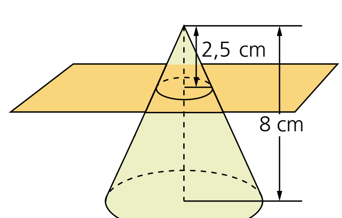


Figura 9

5 Cuerpos redondos

5.4 Esferas

Ten en cuenta

No es posible hacer un desarrollo en el plano de la esfera.

Una **esfera** es un sólido de revolución que resulta al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la Figura 10 se observa cómo se genera una esfera al girar el semicírculo de radio $\overline{OP}$ alrededor de su diámetro $\overline{PP'}$.

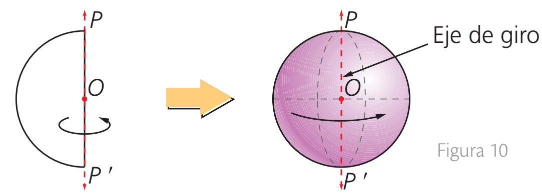


Figura 10

Elementos de una esfera

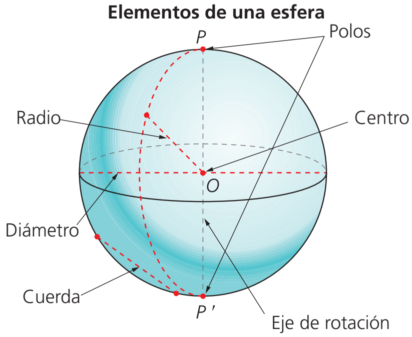


Figura 11

En la Figura 11 se observan los elementos de una esfera, que se explican como sigue.

- **Superficie esférica**. Se genera al girar la semicircunferencia alrededor del eje $\overline{PP'}$.
- **Centro de la esfera**. Es el centro del círculo máximo.
- **Radio de la esfera**. Segmento que se obtiene al unir el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica.
- **Cuerda**. Segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.
- **Diámetro**. Cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- **Polos**. Puntos de corte del eje de giro con la superficie esférica.

Ten en cuenta

Al cortar una esfera por un plano que pase por su centro se obtienen dos casquetes esféricos congruentes denominados **semiesferas** (Figura 15).

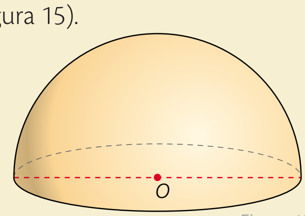
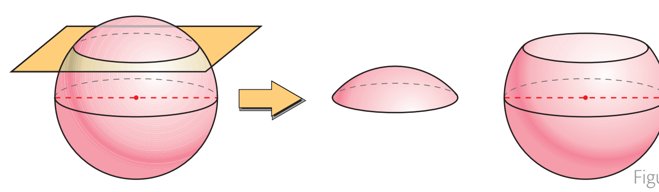


Figura 15

5.5 Casquetes esféricos

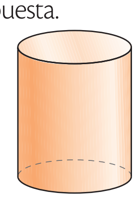
Al cortar una esfera por un plano resultan dos **casquetes esféricos**, como se observa en la Figura 12.

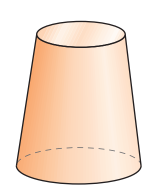

Figura. 12

Actividad resuelta

Comunicación

1 Indica en cada uno de los sólidos de revolución si es un cilindro o no. Explica tu respuesta.

a. 
Figura 13

b. 
Figura 14

Solución:

a. Es un cilindro, ya que sus bases son círculos congruentes.

b. No es un cilindro, pues sus bases son círculos de distinto radio. El sólido es un tronco de cono.

TIC TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

https://luisamariaarias.wordpress.com/matematicas/tema-14-cuerpos-geometricos-volumen/
Refuerza tu conocimiento de los sólidos geométricos.

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar poliedros y cuerpos de revolución de acuerdo a sus características y elementos.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Dibuja el desarrollo en el plano de los cilindros de las figuras 16 y 17 con sus dimensiones.

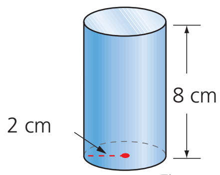


Figura 16

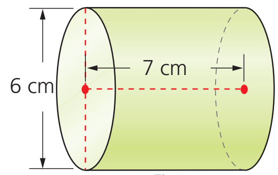


Figura 17

3 Lee y responde.

Si se gira un rectángulo de base 7 cm y altura 11 cm tomando como eje de rotación la altura,

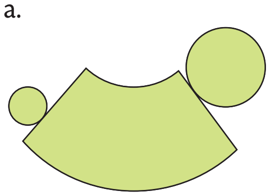
a. ¿qué sólido se forma?

b. ¿cuánto mide la generatriz?

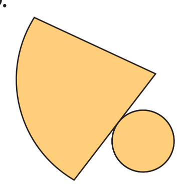
c. ¿cuánto mide la longitud de la circunferencia de la base del sólido?

4 Indica cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cono.

a.


Figura 18

b.


Figura 19

Ejercitación

5 Dibuja un cono de 3 cm de radio y 4 cm de altura. Luego, calcula la longitud de la generatriz.

6 Halla la longitud de la circunferencia que se determina en la superficie esférica al cortar una esfera de radio 9 cm con un plano que pasa por el centro.

Comunicación

7 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. Los cilindros no son poliedros. ( )

b. Si se corta un cilindro recto por un plano paralelo a sus bases se obtienen dos conos de la misma altura. ( )

c. En un cono recto, la generatriz, la altura y el radio de la base forman un triángulo rectángulo isósceles. ( )

d. Una esfera tiene infinitos diámetros. ( )

e. Al cortar una esfera por un plano se obtiene una circunferencia. ( )

f. Si se gira un círculo alrededor de una cuerda se obtiene una esfera. ( )

Resolución de problemas

8 ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia de la base del cono que se obtiene al girar el triángulo *ABC* de la Figura 20 alrededor del lado $\overline{CB}$?

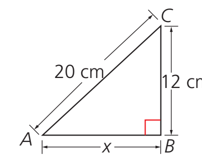


Figura 20

9 Un cono es intersecado por un plano paralelo a la base como se ve en la Figura 21.

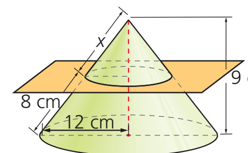
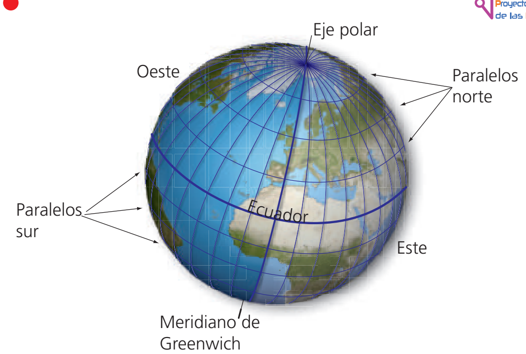


Figura 21

Halla el valor de *x*.

10 La galleta que enrolla un cono de helado tiene 14,5 cm de generatriz y 14 cm de altura. Calcula el radio máximo de la bola de helado que se puede poner en este cono.

11 Observa la figura de la Tierra y resuelve.



a. Indaga cuál es la longitud de la circunferencia de la Tierra en el paralelo del Ecuador y en el meridiano de Greenwich. Compara los resultados. ¿Es posible afirmar que la Tierra tiene forma de esfera?

b. Al realizar un corte imaginario por el Ecuador, ¿qué sólidos se obtienen?

c. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el Ecuador?

d. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el meridiano de Greenwich?

6 Polígonos

Explora

En Ecuador se utilizan tres tipos de señales de tránsito: preventivas, reglamentarias e informativas. Las figuras 1 a 3 presentan algunos ejemplos.

Señal preventiva



Figura 1

Señal reglamentaria



Figura 2

Señal informativa



Figura 3

- ¿Qué tienen en común estas señales de tránsito?

Ten en cuenta

La palabra polígono viene del griego *Polys* (muchos) y *gónia* (ángulos).

La señal preventiva tiene forma de rombo, la reglamentaria tiene forma octagonal y la señal informativa es rectangular.

De acuerdo con lo anterior, estas señales de tránsito tienen forma de **polígonos**.

Un **polígono** es el resultado de la unión de varios segmentos tales que ningún par se interseca, excepto en sus extremos, y ningún par con un extremo común es colineal.

Ejemplo 1

En la Figura 4 se presentan algunos ejemplos de polígonos.

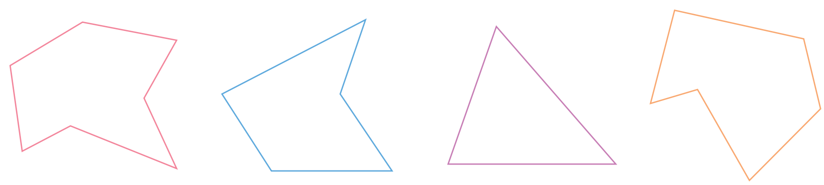


Figura 4

Aquí se observa que los segmentos que forma cada polígono se intersecan solo en los extremos y ningún par de segmentos consecutivos es colineal.

6.1 Elementos de un polígono

Los polígonos constan de los siguientes elementos.

- **Lados**: cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- **Ángulos internos**: cada uno de los ángulos formados por lados consecutivos.
- **Ángulos externos**: cada uno de los ángulos formados por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
- **Vértices**: cada uno de los puntos de intersección de dos lados consecutivos.
- **Diagonales**: segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

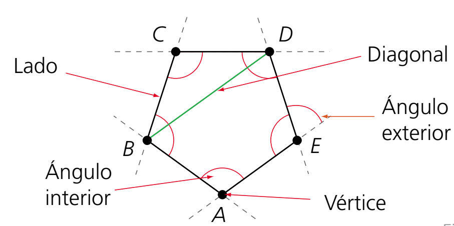


Figura 5

Para nombrar un polígono se emplean las letras que identifican sus vértices. El polígono de la Figura 5 se nombra polígono *ABCDE*.

Ejemplo 2

En el polígono *ADCB* de la Figura 6 se identifican estos elementos:

- Vértices: *A*, *B*, *C* y *D*
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$
- Ángulos internos: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ y $\measuredangle D$
- Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

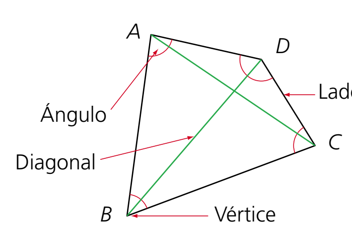


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos.

6.2 Clasificación de polígonos según su forma

Los polígonos se clasifican según su forma en cóncavos y convexos.

- Un polígono es **cóncavo** si al menos uno de sus ángulos internos es mayor que 180º y al trazar las diagonales no todas quedan en el interior del polígono.
- Un polígono es **convexo** si ninguno de sus ángulos internos es mayor que 180º y al trazar sus diagonales, estas quedan totalmente contenidas en el interior del polígono.

Ejemplo 3

- El polígono de la Figura 7 es cóncavo, pues las diagonales trazadas están en el exterior del polígono.

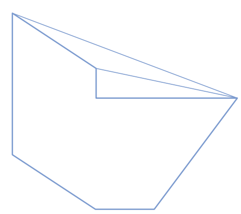


Figura 7

- Por su parte, el polígono de la Figura 8 es convexo, ya que todas sus diagonales quedan en el interior del polígono.

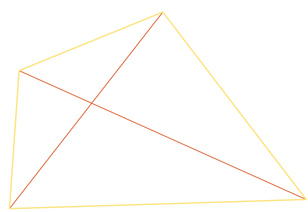


Figura 8

Los polígonos también pueden clasificarse en regulares e irregulares.

- Los **polígonos regulares** tienen todos sus lados congruentes y sus ángulos de la misma medida.
- Los **polígonos irregulares** son aquellos que no cumplen las condiciones anteriores.

Ejemplo 4

- En la Figura 10 se presentan algunos polígonos regulares. Cada polígono tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos de igual medida.

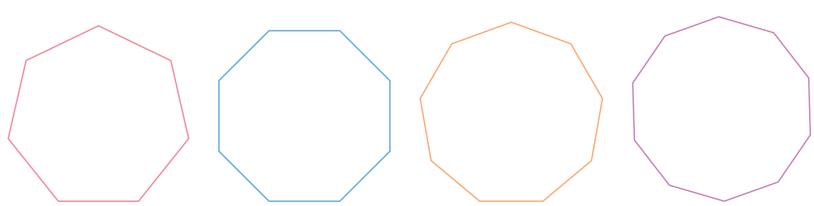


Figura 10

- Los polígonos de la Figura 11 son todos irregulares.

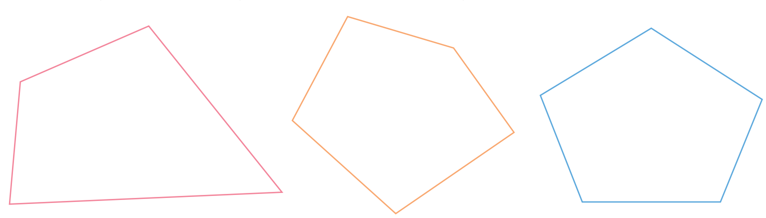


Figura 11

Ten en cuenta

Un polígono convexo de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos trazando todas las diagonales desde un mismo vértice. Por ejemplo, en el polígono *ABCDE* de la Figura 9 se trazaron las diagonales desde el vértice *A* y resultaron tres triángulos.

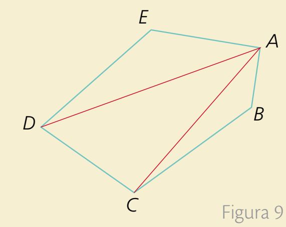
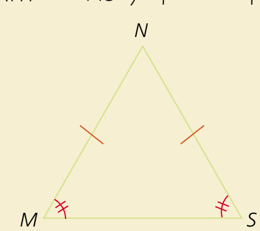


Figura 9

Ten en cuenta

Para indicar que dos o más segmentos o ángulos son congruentes, se hace una marca sobre la figura. Por ejemplo, en el triángulo *MNS*, que se simboliza $\triangle MNS$, se tiene que $\overline{NM} \cong \overline{NS}$ y $\measuredangle M \cong \measuredangle S$.



6 Polígonos

> **Ten en cuenta**
>
> Un polígono con *n* lados se llama *n*-gono. Esta manera de nombrar los polígonos es útil para mencionar aquellos de 13 lados o más; por ejemplo: "13-gono", "14-gono", "21-gono", etc.

6.3 Clasificación de polígonos según su número de lados

Según su número de lados, los polígonos se clasifican como se muestra en la Tabla 1.

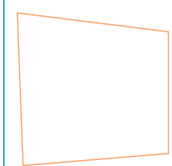
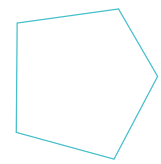
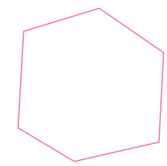
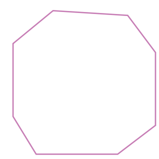
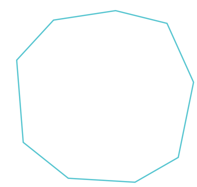
Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
			
Tres lados	Cuatro lados	Cinco lados	Seis lados
Heptágono	**Octágono**	**Nonágono**	**Decágono**
			
Siete lados	Ocho lados	Nueve lados	Diez lados

Tabla 1

Ejemplo 5

- Para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de *n* lados, se utiliza la fórmula $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Así, el número de diagonales de un nonágono será:

$$\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

- La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados se puede determinar mediante la fórmula $(n-2) \cdot 180°$. Así, la suma de los ángulos interiores de un pentágono es $(5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$.

A partir de la fórmula anterior, se puede llegar a deducir que cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de *n* lados mide $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. Esto significa que la medida de cada ángulo interior de un pentágono regular es $\frac{(5-2) \cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Lee y responde.

Es posible recubrir el plano con un polígono regular cuando la medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de 360°.

De acuerdo con esta información, ¿se podrá recubrir el piso con triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares o hexágonos regulares?

Solución:

Al calcular la medida de un ángulo interior de cada polígono regular, se encuentran los siguientes resultados.

Polígono regular	Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular
Medida de cada ángulo interior	60°	90°	108°	120°

Tabla 2

Por consiguiente, se puede recubrir el plano con todos estos polígonos, excepto con el pentágono regular, ya que 108° no es divisor de 360° (Figura 12).

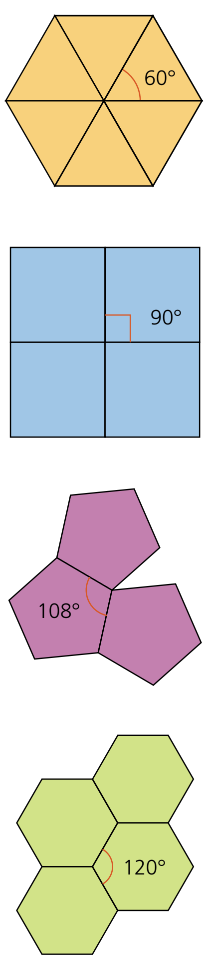


Figura 12

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar polígonos regulares e irregulares según sus lados y ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina cuáles de las figuras 13 a 16 son polígonos y cuáles no.

a.

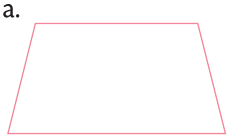


Figura 13

b.

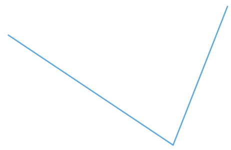


Figura 14

c.

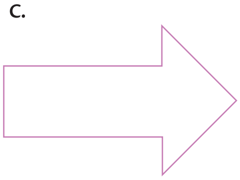


Figura 15

d.

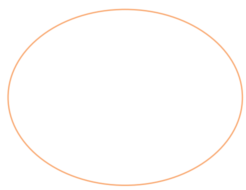


Figura 16

3 Observa la Figura 17 e identifica los elementos que se indican a continuación.

a. Los lados

b. Los vértices

c. Las diagonales

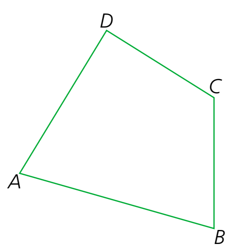


Figura 17

4 Clasifica los polígonos de las figuras 18 a 21 en convexos o cóncavos, según corresponda.

a.

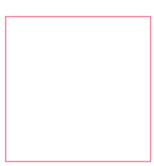


Figura 18

b.

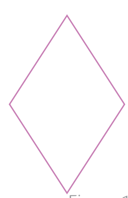


Figura 19

c.

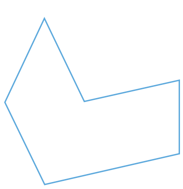


Figura 20

d.



Figura 21

Razonamiento

5 Responde, teniendo en cuenta la fórmula para hallar la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados, las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un decágono?

b. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un eneágono regular?

Comunicación

6 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El rombo es un polígono regular. ( )

b. El cuadrado es un polígono irregular. ( )

c. El cuadrado tiene dos diagonales congruentes. ( )

d. Un polígono es cóncavo cuando todos sus ángulos internos son menores que 180°. ( )

7 Construye una tabla como la de la muestra y registra los datos correspondientes, del triángulo hasta el decágono.

Polígono regular	Número de diagonales	Suma de las medidas de los ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono			
...			

Tabla 3

8 Lee y resuelve.

- Según la medida de sus lados, un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes, equilátero si tiene sus tres lados congruentes, o escaleno si los tres lados tienen distinta medida.
- Según la medida de sus ángulos, un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, acutángulo si tiene sus tres ángulos agudos, u obtusángulo si tiene un ángulo obtuso.

Clasifica cada triángulo de acuerdo con la medida de sus lados y de sus ángulos.

a.

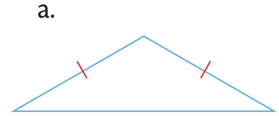


Figura 22

b.

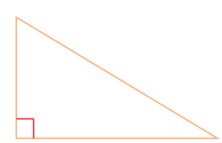


Figura 23

c.

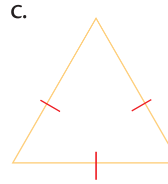


Figura 24

d.



Figura 25

Resolución de problemas

9 Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados de un hexágono regular. Une los vértices sueltos mediante segmentos. ¿Qué obtienes?

7 Cuadriláteros

Explora

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

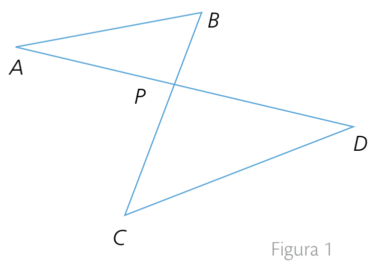


Figura 1

- ¿Se puede afirmar que la figura *ABCD* es un cuadrilátero?

De acuerdo con su definición, un polígono está formado por segmentos que no se intersecan más que en los extremos y, si dos de ellos tienen un extremo común, no son colineales.

En este caso, la Figura 1 está formada por cuatro segmentos, pero $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto *P*, que no corresponde a ninguno de los extremos de estos segmentos. Por lo tanto, la figura *ABCD* no es un cuadrilátero.

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. En este se identifican pares de **lados opuestos** (que no tienen puntos en común) y pares de **lados consecutivos** (que tienen un punto en común, el vértice).

En un cuadrilátero dos **ángulos son opuestos** si solo comparten dos vértices del cuadrilátero, y **consecutivos** si comparten un lado del cuadrilátero.

Ejemplo 1

En el cuadrilátero de la Figura 2 se identifican los siguientes elementos:

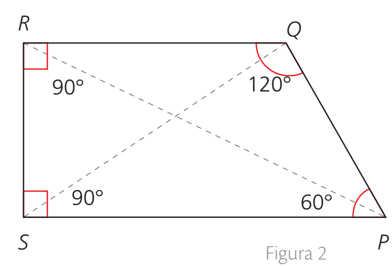


Figura 2

- Los **vértices** (puntos *P*, *Q*, *R* y *S*).
- Los **lados** ($\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$).
- Las **diagonales** ($\overline{PR}$ y $\overline{QS}$).
- Los **lados opuestos** ($\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PS}$).
- Los pares de **lados consecutivos** ($\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$ son algunos de ellos).
- Los **ángulos interiores** del cuadrilátero ($\measuredangle P$, $\measuredangle Q$, $\measuredangle R$ y $\measuredangle S$); con 360° como la suma de sus medidas.

$$60° + 90° + 90° + 120° = 360°$$

- Los **ángulos opuestos** ($\measuredangle S$ y $\measuredangle Q$) y los **ángulos consecutivos** ($\measuredangle S$ y $\measuredangle P$).

El cuadrilátero *PSRQ* se simboliza ☐*PSRQ*.

Los cuadriláteros se clasifican en **paralelogramos**, **trapecios** y **trapezoides**.

7.1 Paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos.

Los cuadriláteros de la Tabla 1 son paralelogramos.

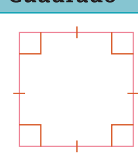
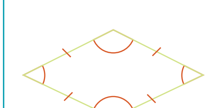
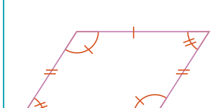
Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
			
Todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos tienen la misma medida.	Todos sus ángulos son rectos.	Todos sus lados son congruentes.	Los ángulos y los lados opuestos son respectivamente congruentes.

Tabla 1

Ten en cuenta

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

App

Polígonos

Abre la aplicación *Las figuras geo-métricas* e identifica las propiedades y elementos de los polígonos.



Destreza con criterios de desempeño: Clasificar cuadriláteros según sus lados y ángulos.

7.2 Propiedades de los paralelogramos

1. La diagonal de un paralelogramo define dos triángulos congruentes.

   En la Figura 3, la diagonal $\overline{QN}$ del paralelogramo *NMQP* determina:

   $$\triangle MQN \cong \triangle PQN$$

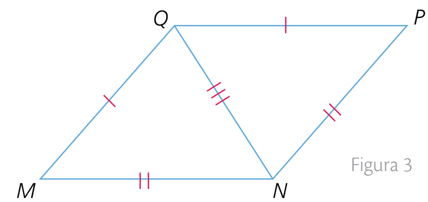


Figura 3

2. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. En la Figura 4 se observa que:

   $$\overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ y } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

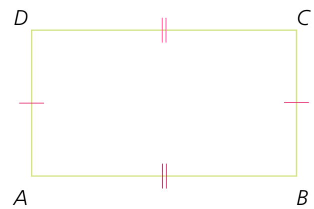


Figura 4

3. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. En el paralelogramo *PSRQ* de la Figura 5 se tiene que:

   $$\measuredangle P \cong \measuredangle R \text{ y } \measuredangle S \cong \measuredangle Q$$

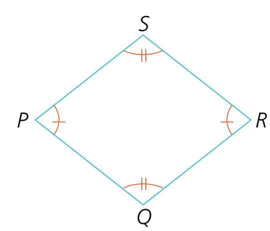


Figura 5

4. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en un punto medio. En la Figura 6 se observa que las diagonales $\overline{MQ}$ y $\overline{PA}$ se intersecan en *T*. De acuerdo con esta propiedad, se tiene que:

   $$\overline{AT} \cong \overline{PT} \text{ y } \overline{MT} \cong \overline{QT}$$

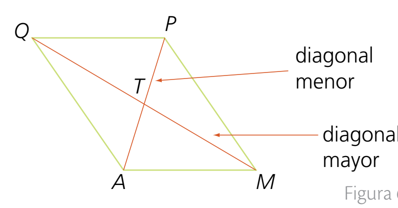


Figura 6

5. Pares de ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, es decir, la suma de sus medidas es igual a 180°. En la Figura 7:

   $m\measuredangle D + m\measuredangle E = 180°$
   $m\measuredangle E + m\measuredangle F = 180°$
   $m\measuredangle F + m\measuredangle G = 180°$
   $m\measuredangle G + m\measuredangle D = 180°$

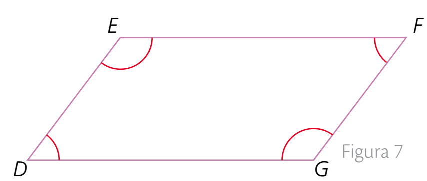
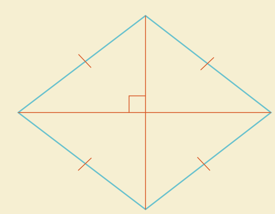


Figura 7

Ten en cuenta

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero es un rombo.



Ejemplo 2

La Figura 8 muestra el paralelogramo *PQSR* con $m\measuredangle P = 120°$. Como el ángulo *Q* es suplementario con el ángulo *P*, entonces:

$$m\measuredangle Q = 180° - 120° = 60°$$

El ángulo *S* es el suplemento del ángulo *Q*; por tanto:

$$m\measuredangle S = 180° - 60° = 120°$$

Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, se tiene que:

$$m\measuredangle R = m\measuredangle Q = 60°$$

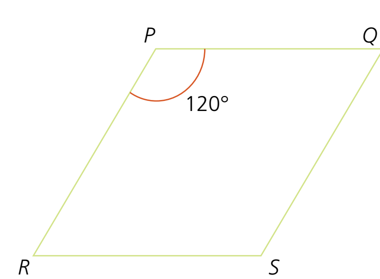


Figura 8

7 Cuadriláteros

7.3 Trapecios

El **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos denominados **bases**. A la distancia entre las bases se le conoce como **altura**.

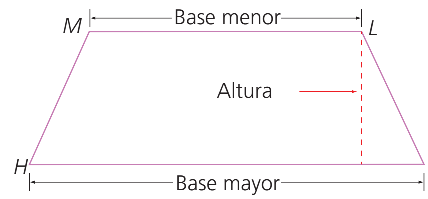


Figura 9

Los trapecios se clasifican como se muestra en la Tabla 2.

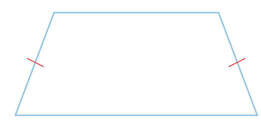
Escaleno	Isósceles	Rectángulo
		
Sus cuatro lados son de diferente medida.	Sus lados no paralelos son congruentes.	Dos de sus ángulos son rectos.

Tabla 2

Ten en cuenta

El trapezoide simétrico tiene un eje de simetría que coincide con su diagonal mayor. Los trapezoides asimétricos no poseen ejes de simetría.

7.4 Trapezoides

Los **trapezoides** son cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos.

Los trapezoides se clasifican en **simétricos** y **asimétricos** como se muestra en la Tabla 3.

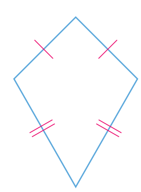
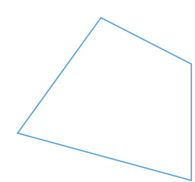
Trapezoide simétrico	Trapezoide asimétrico
	
Tiene dos pares de lados congruentes.	Sus cuatro lados tienen distinta medida.

Tabla 3

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Dibuja dos trapecios isósceles, traza sus diagonales y deduce una propiedad de estos cuadriláteros.

Solución:

En la Figura 10 se observan dos trapecios isósceles con sus respectivas diagonales.

Al medir con una regla las diagonales de los trapecios, se obtiene que tienen la misma medida; por esto la propiedad que se puede establecer es: "En todo trapecio isósceles las diagonales son congruentes"

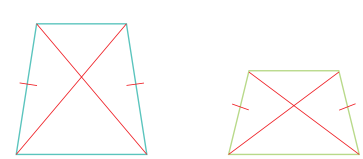


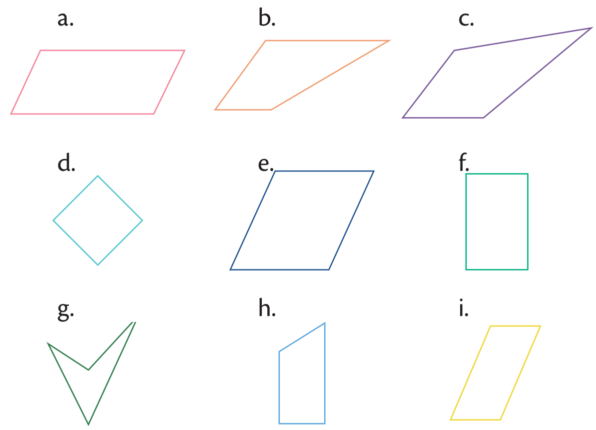
Figura 10

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar cuadriláteros según sus lados y ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Clasifica estas figuras según el tipo de cuadrilátero al que corresponda cada una.



3 Escribe qué tipo de cuadrilátero aparece en la Figura 11. Indica sus características.

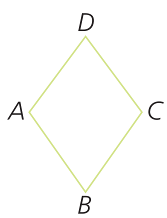


Figura 11

Modelación

4 Dibuja cuadriláteros que cumplan las condiciones dadas.

a. Las medidas de dos ángulos son 124º y 56º.

b. Las diagonales son congruentes y perpendiculares.

c. Todos sus ángulos miden 90º y sus lados miden 3 cm.

d. Una de las diagonales determina dos triángulos equiláteros.

e.Tres lados son congruentes.

Razonamiento

5 Analiza y responde.

a. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales congruentes?

b.¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un paralelogramo?

c. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales perpendiculares?

d.¿Todo cuadrado es un rectángulo?

e. ¿Algún rombo es cuadrado?

f. ¿Todo rombo es cuadrado?

Ejercitación

6 Observa la Figura 12, que está formada por el cuadrilátero *DFEB* y el triángulo *ADB*. ¿Cuánto mide el ángulo *E* y el ángulo *D*?

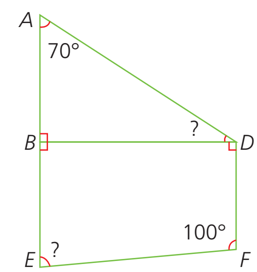


Figura 12

7 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Dibuja las figuras que creas pertinentes.

a. En todo paralelogramo siempre se cumple que los ángulos consecutivos son suplementarios. ( )

b. Al unir los puntos medios de los lados de un rombo, se obtiene un cuadrado. ( )

c. Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado. ( )

d. Todos los ángulos de un cuadrado miden 90°. ( )

e.Las diagonales de un rectángulo son perpendiculares entre sí. ( )

f. Los ángulos consecutivos de un rombo son congruentes. ( )

g. Todo romboide es un rombo. ( )

Resolución de problemas

8 En el cuadrilátero de la Figura 13, ¿cuánto mide el ángulo exterior *x*?

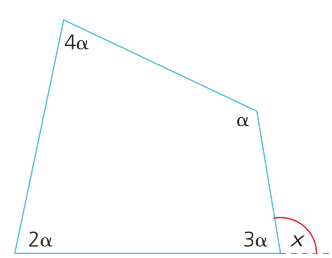


Figura 13

9 Observa en la Figura 14 el plano de una casa e identifica el cuadrilátero correspondiente a cada lugar.

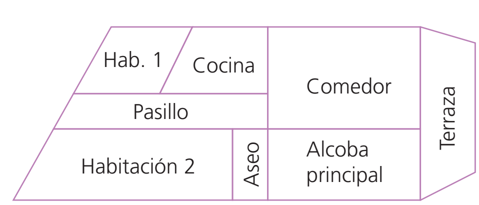
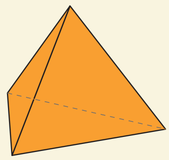


Figura 14

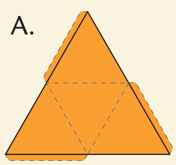
Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

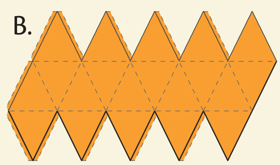
1. El desarrollo en el plano del poliedro regular es:



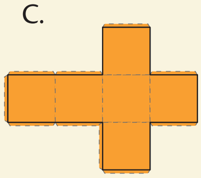
A.



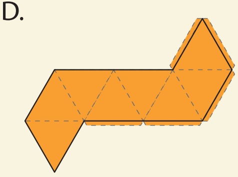
B.



C.



D.



2. Un cubo tiene:

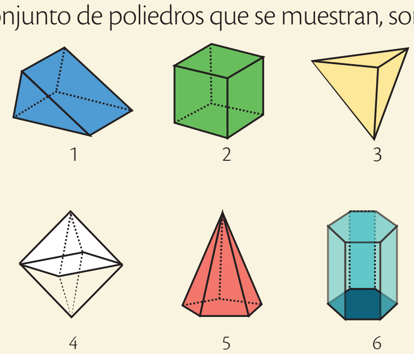
A. 4 vértices

B. 8 vértices

C. 16 vértices

D. 20 vértices

3. Del conjunto de poliedros que se muestran, son regulares:



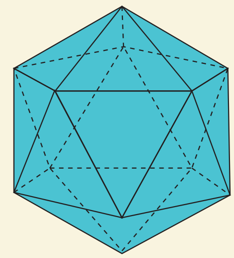
A. 1, 3, 5

B. 2, 4, 5

C. 3, 4, 6

D. 2, 3, 4

4. El número de vértices del cuerpo que se observa en la figura es:



A. 15

B. 14

C. 12

D. 10

5. Un poliedro de 12 caras y 8 vértices tiene:

A. 6 aristas

B. 10 aristas

C. 18 aristas

D. 22 aristas

6. Si un cono tiene 3 cm de radio y 4 cm de altura, entonces su generatriz mide:

A. 7 cm

B. 5 cm

C. 2 cm

D. 1 cm

7. Son partes de una pirámide hexagonal:

A. apotema y generatriz

B. radio y altura

C. apotema mayor y menor

D. dos generatrices

8. La altura de un cono de radio 12 cm y generatriz 15 cm es:

A. 3 cm

B. 6 cm

C. 9 cm

D. 12 cm

Indicadores de logro:
- Clasifica poliedros de acuerdo a sus características.
- Identifica cuerpos redondos.
- Calcula elementos de poliedros y cuerpos redondos.
- Reconoce distintos tipos de polígonos.

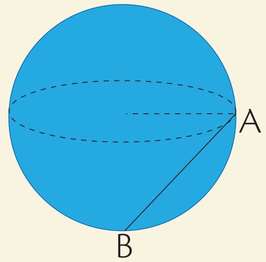
9. Si el diámetro de la esfera es de 20 cm, la longitud de la cuerda AB sin cifras decimales es:

A. 10 cm

B. 12 cm

C. 14 cm

D. 16 cm



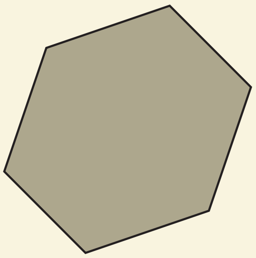
10. El número de diagonales de la figura es:

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7



11. La medida de cada ángulo interior de un nonágono regular es:

A. 20°

B. 40°

C. 120°

D. 140°

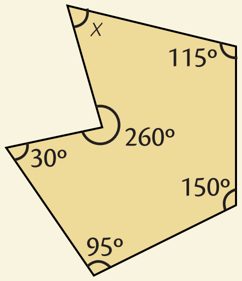
12. La medida del ángulo *x* es:

A. 50°

B. 60°

C. 70°

D. 80°



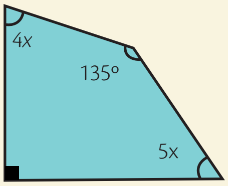
13. El valor de x es:

A. 5°

B. 10°

C. 15°

D. 25°



14. Los cuerpos redondos son:

A. circunferencia, cono, esfera

B. cilindro, cono, esfera

C. cono, pirámide, esfera

D. esfera, cilindro, círculos

15. La longitud de la circunferencia de la base de un cilindro que se obtiene al rotar sobre el lado mayor un rectángulo de 4 m de base y 7 m de altura es:

A. 8π m

B. 10π m

C. 14π m

D. 49π m

16. El número de caras de un polígono convexo que tiene 16 vértices y 18 aristas es:

A. 8

B. 6

C. 5

D. 4

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

El valor del dinero: ¿Es un medio o un fin?

El dinero es importante como medio de intercambio y porque ayuda a mejorar la calidad de vida de las personas. Para algunos, tener dinero adquiere tanta importancia que ocupa el primer lugar en su escala de valores y lo convierten en su dios. Esto no es recomendable porque crean dependencia del dinero para sentirse valiosos y descuidan otros aspectos importantes de la vida, como la familia, la salud, etc. Por su parte, para una persona con un espíritu emprendedor, el dinero es valioso como un medio para lograr objetivos y lo obtiene siempre bajo principios éticos, porque esto le da sostenibilidad a todo lo que emprende.


SM Ediciones

1. Lee la siguiente oración y resuelve.

Tener como principal fin de nuestras vidas conseguir dinero es como inflar un globo que tiene un hueco.

a. Explica el mensaje de la oración.

....

....

....

b. Dibuja el significado de la oración.

c. ¿Cuál de estas dos oraciones tiene un significado parecido a de la que dibujaste? Explica tu respuesta al grupo.

- El dinero es la raíz de todos los males.
- Tener al dinero como el propósito de la vida nos hará sentir vacíos.

En plenaria

2. Escribe "Sí", si estás de acuerdo con cada afirmación y "No" en caso contrario. Comparte en plenaria tus respuestas y arguméntalas.

a. Solo el dinero en cantidad ofrece tranquilidad y felicidad duradera. ( )

b. Una persona con valores y principios consigue dinero por cualquier medio. ( )

c. La felicidad de las personas depende del dinero que tengan. ( )

d. El dinero adquirido con principios genera sostenibilidad y satisfacción. ( )

e. Cuando el dinero es lo único que importa, ninguna cantidad será suficiente. ( )



Trabajo en grupo

3. Leer el siguiente texto.

El dinero es un fin cuando se convierte en la prioridad de las personas, en el objetivo de la vida. Entonces, solo satisface necesidades de ego, como el poder y el reconocimiento, se malgasta y se convierte en fortuna que no trasciende.

A medida que se tiene más dinero, se generan nuevas necesidades que hacen que se necesite más dinero para satisfacerlas. Así, se entra en un círculo vicioso donde nunca es suficiente el dinero que se tenga y, en consecuencia, la felicidad es temporal: dura el tiempo que haya dinero.



SM Ediciones

a. Citen dos ejemplos de situaciones donde el dinero es un fin.

- ....
....
- ....
....

b. ¿Por qué estas situaciones no generan una vida tranquila, sostenible y terminan en infelicidad?

....
....
....
....

4. El dinero es un medio cuando se utiliza como instrumento para lograr metas significativas, en el desarrollo personal o profesional, y apoya el logro de objetivos; también lo es cuando satisface necesidades de contribuir, servir y amar, cuando se consigue conservando valores y principios; de esta manera el dinero, cuando genera libertad, independencia y felicidad duradera.

a. Citen ejemplos de actividades en donde la inversión de dinero genere felicidad duradera.

....
....
....
....

b. Expliquen en plenaria la diferencia entre estas dos oraciones.

Ganemos todo el dinero que nos merezcamos.	*Ganemos todo el dinero que podamos.*



SM Ediciones

5. Escriban dos conclusiones, con base en esta pregunta: ¿dónde está el valor el dinero y cómo lo consigue una persona emprendedora?

....
....
....

Habilidades digitales

Explica tus ideas con emaze

Organizar y presentar la información con *emaze* resulta dinámico y llamativo. Este programa permite realizar presentaciones visuales de manera práctica y agradable. Además, las presentaciones quedan listas para compartir en Internet. Solo necesitas tener las imágenes apropiadas y el texto necesario. Con esta actividad aprenderás a realizar una presentación ágil, capturando pantallas de video y utilizando fuentes de información confiables.

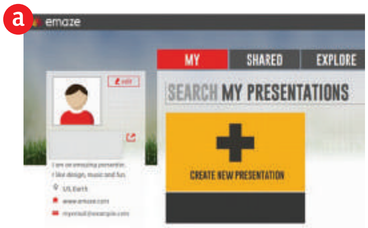
1 Abre tu cuenta de emaze

a. Ingresa a www.emaze.com/es en tu navegador (Chrome, Explorer, Firefox, Safari).

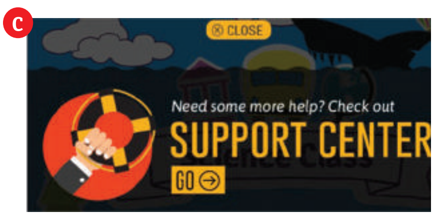
b. Ingresa tu correo electrónico, crea una contraseña y oprime el botón Regístrate. En la ventana que se despliega selecciona la opción para crear una cuenta gratis.

c. Selecciona la opción para crear una nueva presentación (a); luego, escoge la plantilla que más te guste (b); por último, cierra la opción de ayuda que te aparecerá (c).



a


b


c


2 Conoce la herramienta

El área de trabajo de este programa es sumamente sencillo: puedes importar las imágenes que quieras, insertar y modificar textos, incluir videos, crear gráficas e insertar imágenes.



3 Descarga imágenes

a. Observa en http://goo.gl/8xcgeZ un video sobre la proporcionalidad. Después de verlo, busca en la Web imágenes que te permitan explicar la proporcionalidad.

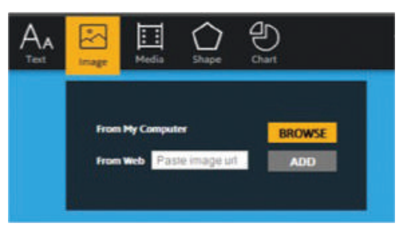
b. Descarga las imágenes así:

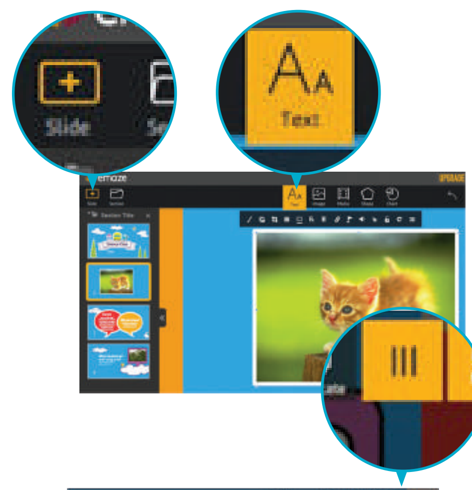
1. Oprime clic derecho sobre la imagen que deseas utilizar. Aparecerá un menú de herramientas en el que debes seleccionar la opción "Guardar imagen como...".
2. En la ventana que se abre, selecciona la carpeta donde quieras guardar tu imagen. Luego, cambia el nombre de la imagen y oprime Guardar.



4 Edita tu presentación

a. En la ventana de *emaze*, haz clic en Image y luego en Browse para buscar las imágenes descargadas e insertarlas en tu presentación.





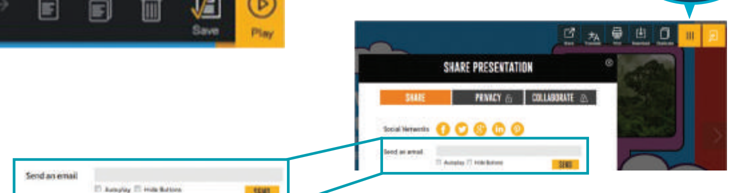
b. Añade las diapositivas o *slides* que necesites. Modifica e inserta la cantidad de textos suficientes para explicar el tema.

c. Guarda y revisa tu presentación haciendo clic en el botón Play.





d. Haz clic en el ícono de la parte superior derecha. En la ventana que se despliega, escribe los correos electrónicos de tus compañeros para compartirles tu presentación.



Mejora tu presentación

a. Inserta una gráfica o una tabla para representar un par de magnitudes directa o inversamente proporcionales; para ello, haz clic en el ícono Chart (puedes escribir los datos en *emaze* o importarlos desde una hoja de cálculo).

b. Escribe un enunciado relacionado con los datos que represente.







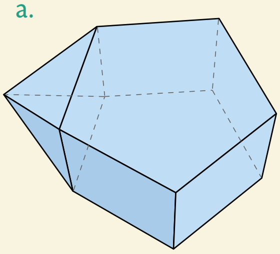
Evaluación de la Unidad

Poliedros

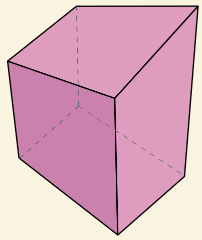
Ejercitación

1. Determina el número de caras, vértices y aristas de los siguientes poliedros.

a.



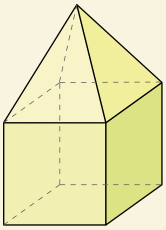
b.



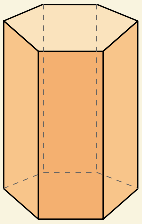
Razonamiento

2. Determina cuáles de los siguientes poliedros son regulares y cuáles no.

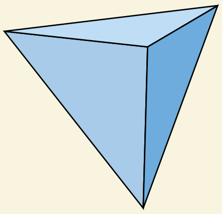
a.



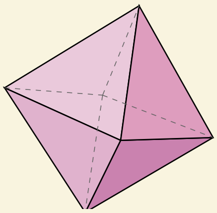
b.



c.



d.



Prismas

Comunicación

3. Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F).

a. Un paralelepípedo es un prisma regular.

b. Todas las caras de un ortoedro son rombos.

c. Los paralelepípedos se clasifican según el tipo de paralelogramo que formen sus caras.

d. Todas las caras de un romboedro son polígonos regulares.

e. Todos los prismas cuadrangulares son romboedros.

Pirámides

Resolución de problemas

4. Sara construye una pirámide que consta de cuatro vértices y seis aristas. ¿Qué tipo de pirámide construye Sara?

5. En la clase de matemáticas, la profesora le hace la siguiente pregunta a Daniela: "Si se unen dos pirámides cuadrangulares por su base, ¿es posible obtener un poliedro regular? Ayúdale a Daniela a contestar la pregunta.

Poliedros regulares

Razonamiento

6. Completa la siguiente tabla.

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de caras que concurren en un vértice
Tetraedro		
Cubo		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

Indicadores de logro:

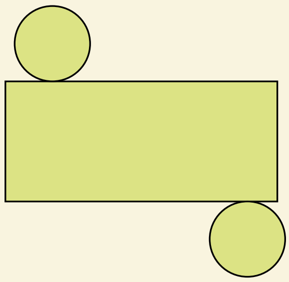
- Clasifica poliedros de acuerdo a sus características.
- Identifica cuerpos redondos.
- Calcula elementos de poliedros y cuerpos redondos.
- Reconoce distintos tipos de polígonos.

Cuerpos redondos

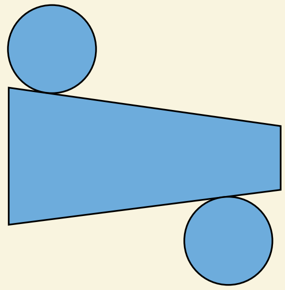
Razonamiento

7. Determina si los siguientes desarrollos corresponden a cilindros o no.

a.



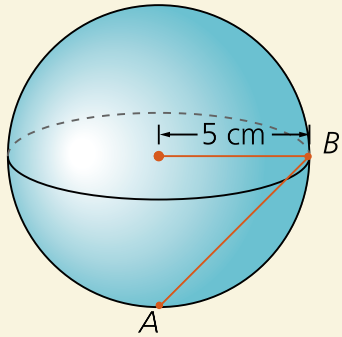
b.



Ejercitación

8. Calcula la altura de un cono de 15 cm de generatriz y 4 cm de radio.

9. Halla la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.

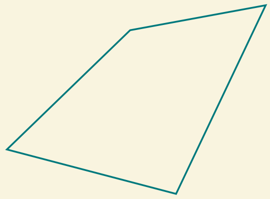


Polígonos

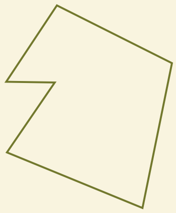
Comunicación

10. Clasifica los siguientes polígonos en cóncavos o convexos, según corresponda. Luego, determina el número de lados y de vértices de cada uno de ellos.

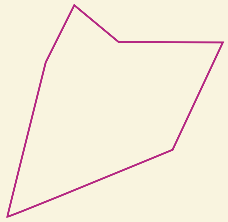
a.



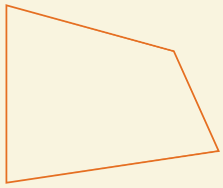
b.



c.



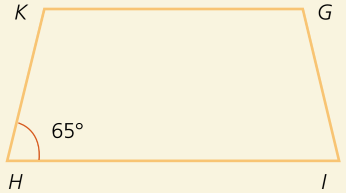
d.



Cuadriláteros

Ejercitación

11. Calcula la medida de los tres ángulos que faltan en el trapecio isósceles.



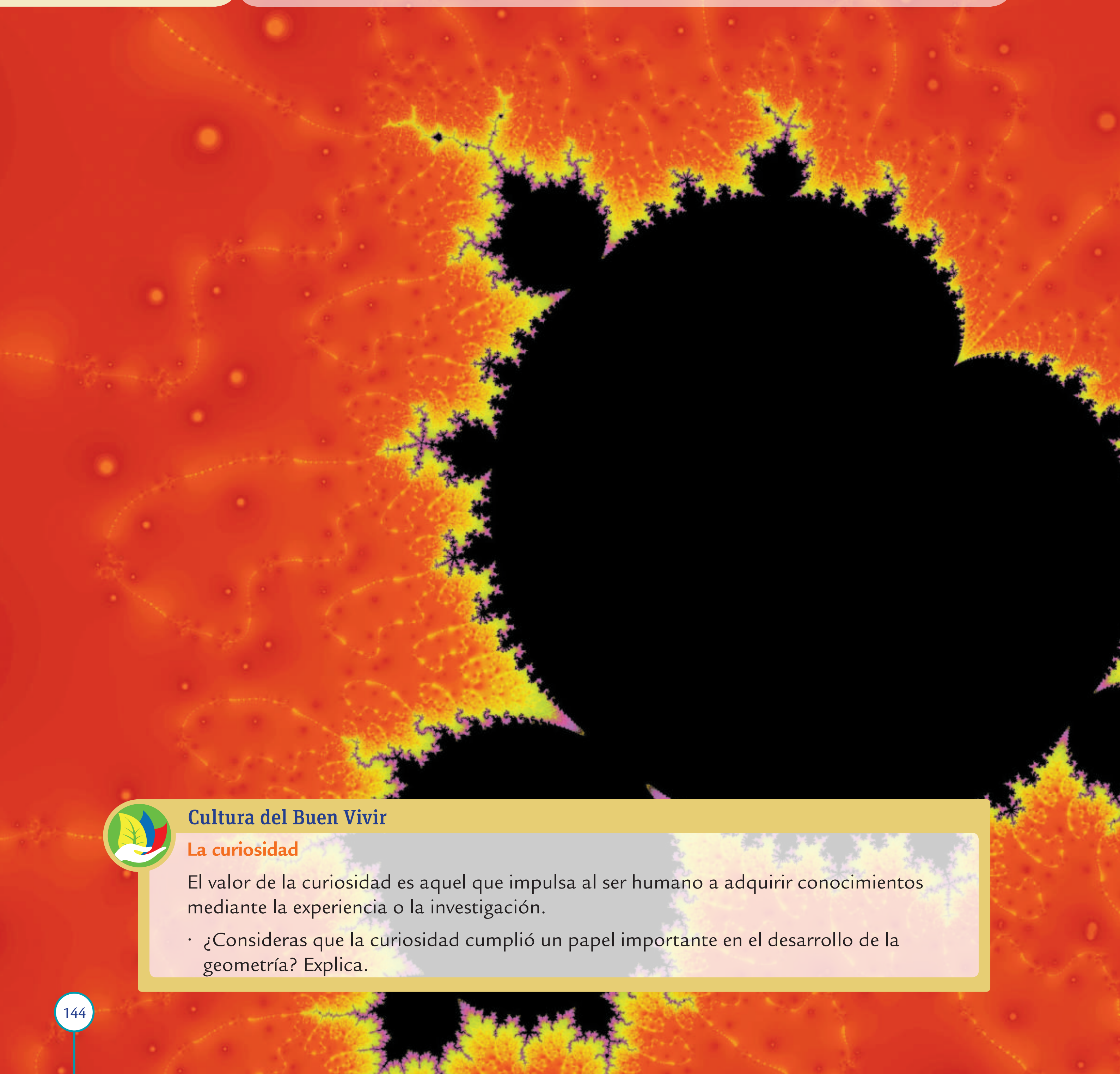
4 Semejanza y Medición

BLOQUE

Geometría y Medida

En la naturaleza se observan diversas formas consideradas similares entre sí; por ejemplo, ramas de árboles parecidas a las neuronas, nebulosas con la forma del ojo humano y plantas similares a las piñas, entre otros.

- Describe las similitudes que existen entre los ejemplos mencionados.



Cultura del Buen Vivir

La curiosidad

El valor de la curiosidad es aquel que impulsa al ser humano a adquirir conocimientos mediante la experiencia o la investigación.

- ¿Consideras que la curiosidad cumplió un papel importante en el desarrollo de la geometría? Explica.

Aprenderás...

- Figuras congruentes y figuras semejantes
- Teorema de Tales
- Criterios de semejanza de triángulos
- Simetría en figuras geométricas
- Homotecias
- Unidades de superficie
- Área de figuras planas y sólidos geométricos
- Teorema de Pitágoras

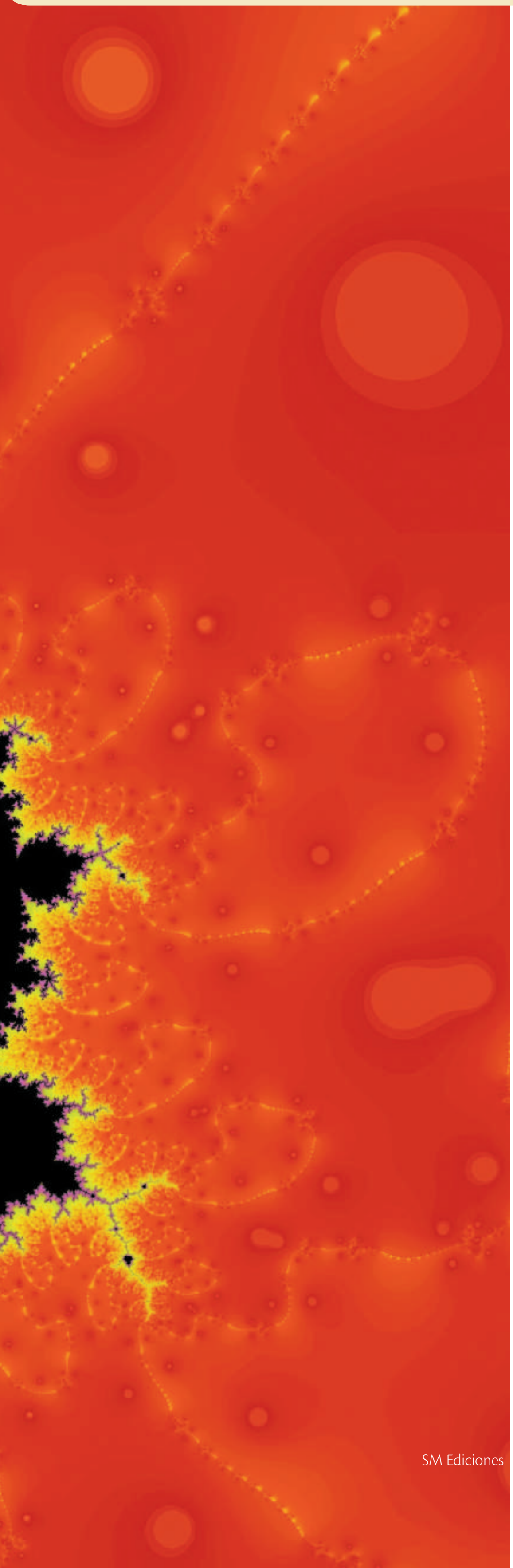
Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E


SM Ediciones

Habilidades lectoras

La geometría fractal

Un fractal es algo irregular, pero lo más importante es que si lo ampliamos arbitrariamente seguirá siendo irregular, ya que es una figura que mantiene su forma original aunque se le cambie de escala; es decir, por más veces que se le modifique la dimensión seguiremos obteniendo una figura similar a la anterior. En general, los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su semejanza, son figuras infinitas que podrás dividir y dividir, fraccionar y fraccionar cuantas veces desees, y seguirán teniendo la misma estructura sin cambiar.

[...] Un ejemplo sencillo y básico para comprender mejor los fractales es la ramificación de un árbol: del tronco salen las ramas, de estas ramas crecen otras más pequeñas, de estas ramitas salen ramas más pequeñas con detalles que se repiten hasta las ramitas más y más pequeñas. Es en la década de los setenta cuando los fractales surgen de la curiosidad de los matemáticos, quienes mediante el desarrollo de intuiciones, fórmulas y abstracciones crearon una manera distinta de ver la realidad. Generalmente, si nosotros observamos a nuestro alrededor encontramos figuras geométricas ordenadas y bonitas, mientras que en el mundo de los fractales predomina el caos y las figuras monstruosas, llevándonos al conocimiento de la complejidad, el desorden y el movimiento que existen en la naturaleza y la sociedad. Sin embargo, gracias a la belleza de los fractales podemos observar la belleza del caos, quitándonos esa idea negativa que tenemos de él, inspirándonos a investigar y comprender mejor la turbulencia, lo inesperado, lo azaroso, la no linealidad, etc, que existen en el universo, la naturaleza y la sociedad.

Adaptado de: Urbano, Alicia. La geometría que nos rodea. Universidad de Granada, 2012, págs. 36 y 39.

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué sucede cuando se amplía o se hace *zoom* en un fractal?

2. ¿En qué situaciones de la vida cotidiana se puede hablar de orden?

Argumenta

3. ¿Qué similitudes se encuentran entre cada una de las figuras que conforman un fractal?

4. ¿Consideras que en el tráfico de tu ciudad existe el orden o el caos? Explica.

Propón

5. ¿Conoces algún fractal? Dibújalo y enséñalo a tus compañeros; de lo contrario, trata de dibujar alguno.

1 Figuras congruentes y figuras semejantes

Explora

Calca la Figura 1 y compárala con la Figura 2.

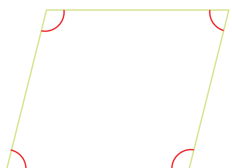


Figura 1

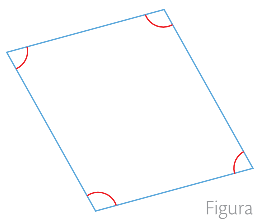


Figura 2

- ¿Qué encuentras cuando comparas su forma y tamaño?

1.1 Figuras congruentes

Al calcar la Figura 1 y superponerla a la Figura 2, se observa que coinciden exactamente, excepto en su posición, tal como se observa en la Figura 3.

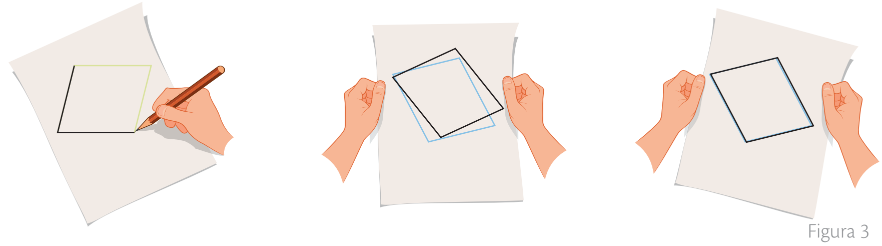


Figura 3

Las figuras tienen la misma forma y el mismo tamaño; además, sus lados correspondientes son congruentes (tienen la misma medida) y, a su vez, sus ángulos correspondientes con congruentes.

Dos **figuras** son **congruentes** si tanto los ángulos correspondientes como los lados correspondientes son congruentes. La relación de congruencia se simboliza con $\cong$.

Ejemplo 1

Los triángulos de las figuras 4 y 5 son congruentes, ya que se cumple que:

1. $AB = 23$ cm $= DE$; $BC = 44$ cm $= EF$; $AC = 40$ cm $= DF$. Por lo tanto,

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$

2. $m\measuredangle A = 84° = m\measuredangle D$; $m\measuredangle B = 53° = m\measuredangle E$; $m\measuredangle C = 43° = m\measuredangle F$. Entonces,

$$\measuredangle A \cong \measuredangle D,\ \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ y } \measuredangle C \cong \measuredangle F$$

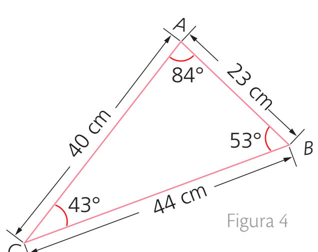


Figura 4

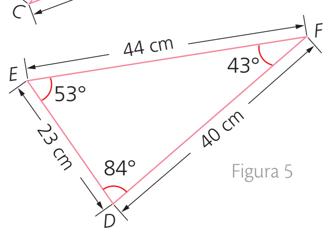


Figura 5

Ten en cuenta

Dos figuras congruentes son semejantes. En tal caso, la razón de semejanza es 1.

1.2 Figuras semejantes

Dos **figuras** son **semejantes** cuando los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. El cociente entre los lados correspondientes se llama **razón de semejanza** o **escala**. Se designa por la letra *k*.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Explica por qué los cuadriláteros de las figuras 6 y 7 son semejantes. Indica cuál es la razón de semejanza.

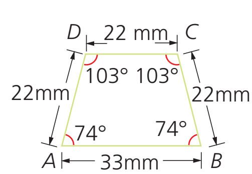


Figura 6

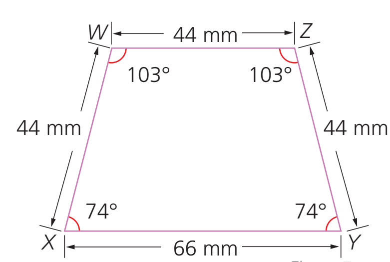


Figura 7

Solución:

En las figuras se observa que $\measuredangle A \cong \measuredangle X$; $\measuredangle B \cong \measuredangle Y$; $\measuredangle C \cong \measuredangle Z$; $\measuredangle D \cong \measuredangle W$,

y que $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZW} = \frac{DA}{WX} = \frac{1}{2}$.

Es decir, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Copia en tu cuaderno cada polígono y traza otro congruente a este en diferente posición.

a.

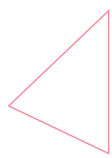


Figura 8

b.

Figura 9

c.

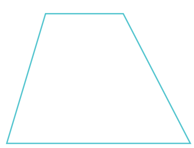


Figura 10

d.

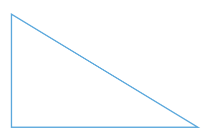


Figura 11

3 Calcula la razón de semejanza de dos triángulos semejantes, si un lado del más pequeño mide 4 cm y el lado correspondiente del más grande mide 6 cm.

4 Identifica cuál de las figuras de la parte inferior no tiene una pieza congruente en el rompecabezas.

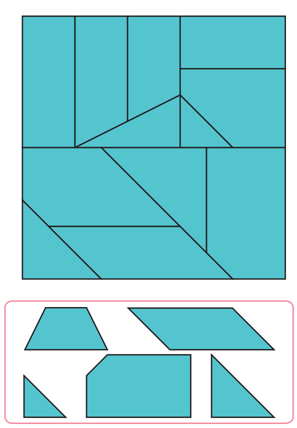


Figura 12

5 Halla la medida de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 5 cm, 9 cm y 12 cm, con razón de semejanza igual a 3.

6 Lee y halla lo que se indica en cada caso.

Un rectángulo de 8 cm de altura y 20 cm de base es semejante a otro rectángulo de 6 cm de altura.

a. La razón de semejanza.

b. La base del otro rectángulo.

c. Las áreas de ambos rectángulos.

Razonamiento

7 Construye cuadrados de diferentes medidas e indica si son semejantes. Justifica tu respuesta.

8 Determina si un rectángulo que mide 6 cm de largo por 8 cm de ancho es semejante a uno de 15 cm de largo por 24 cm de ancho.

9 Comprueba si el paralelogramo *ABCD* es semejante al paralelogramo *XYWZ*.

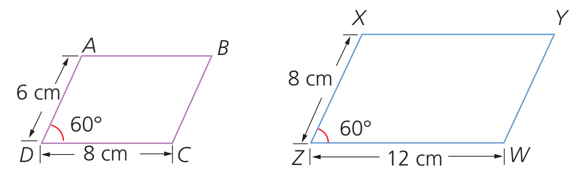


Figura 13

10 Indica si son o no congruentes los cuadriláteros que se muestran a continuación.

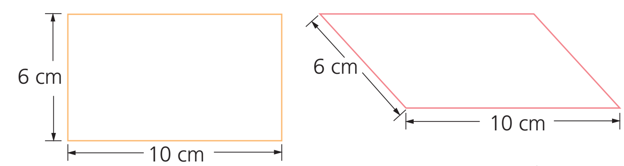


Figura 14

Resolución de problemas

11 Halla el valor de *x* en cada caso, si se sabe que cada par de triángulos son semejantes.

a.

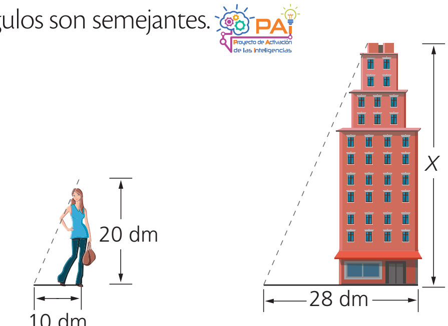


Figura 15

b.

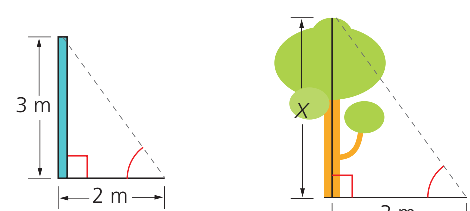


Figura 16

12 En una fotografía, Luis y Nancy miden 2,7 cm y 2,5 cm, respectivamente. En la realidad, Nancy tiene una altura de 162,5 cm.

a. ¿A qué escala está hecha la foto?

b. ¿Qué estatura tiene Luis en la realidad?

13 Dado un segmento de 20 cm, se construye otro semejante a él aplicando una escala $k = 0{,}2$. ¿Cuánto mide este último?

2 Teorema de Tales

Explora

En la Figura 1 se observa que los lados del triángulo *ABC* miden 4 cm, 6 cm y 8 cm.

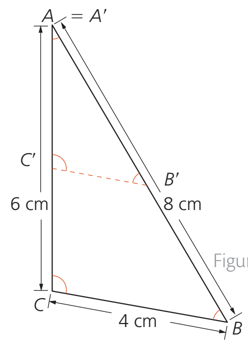


Figura 1

- Si $\overline{C'B'}$ es paralelo a $\overline{CB}$ e interseca los otros dos lados del triángulo *ABC* en su punto medio, ¿se puede afirmar que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes?

Ten en cuenta

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, se determinan cuatro pares de ángulos correspondientes que son congruentes. En la Figura 3 se tiene que $a \cong a'$, $b \cong b'$, $c \cong c'$ y $d \cong d'$.

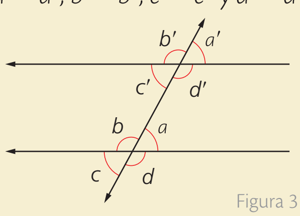


Figura 3

Ten en cuenta

Dos **triángulos están en posición de Tales** si tienen un ángulo común y los lados respectivos opuestos a este ángulo son paralelos. Los triángulos en posición de Tales son semejantes.

TIC — TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=15219

Realiza más actividades sobre el teorema de Tales.

Para responder la pregunta, se pueden seguir estos pasos.

1. Se determina la congruencia de los ángulos.

$\measuredangle A$ y $\measuredangle A'$ son congruentes porque indican el mismo ángulo. $\measuredangle B$ y $\measuredangle B'$, y $\measuredangle C$ y $\measuredangle C'$ son respectivamente congruentes, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

2. Se determinan las proporciones.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

De los pasos 1 y 2, se concluye que $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son triángulos semejantes. Esto se simboliza así: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. En este caso, 2 es la razón de semejanza.

El resultado anterior permite generalizar el que se conoce como el **teorema de Tales**.

> Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

Otra forma de enunciar el teorema de Tales es la siguiente:

Si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

En la Figura 2 se observan dos rectas secantes (*r* y *s*) cortadas por varias rectas paralelas (*a*, *b* y *c*).

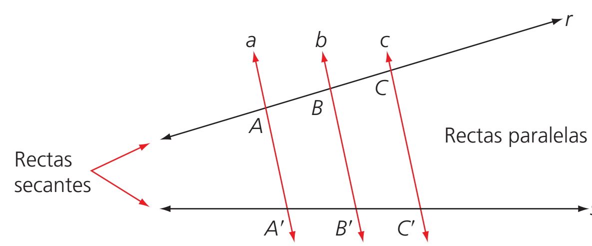


Figura 2

Según esta forma de enunciar el teorema de Tales, los segmentos determinados sobre la recta *r* son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta *s*. Es decir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula la longitud del segmento $A'B'$ de la Figura 4, si $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$.

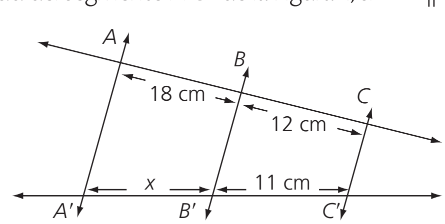


Figura 4

Solución:

Los segmentos determinados sobre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ cumplen las condiciones del teorema de Tales. Por tanto,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{12}{11} \Rightarrow 12 \cdot x = 18 \cdot 11 \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 11}{12} = 16{,}5 \text{ cm.}$$

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre figuras semejantes (Teorema de Tales).

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Analiza y responde.

- ¿Los triángulos formados por una farola, un poste vertical y su sombra están en posición de Tales?

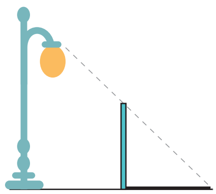


Figura 5

Razonamiento

3 Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 cm y 8 cm. Al unir sus puntos medios, ¿resulta un triángulo semejante a este? Justifica tu respuesta.

4 Traza en un triángulo ABC una recta paralela al lado $\overline{BC}$ desde un punto B', de manera que $AB' = 0{,}25AB$. ¿Cuál es la razón de semejanza?

5 Observa la Figura 6 , donde al unir los puntos medios de los lados del triángulo se forma otro. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo pequeño?

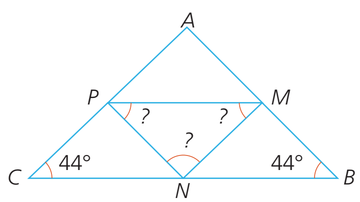


Figura 6

Ejercitación

6 Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud de los segmentos que faltan en cada caso.

a. $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$

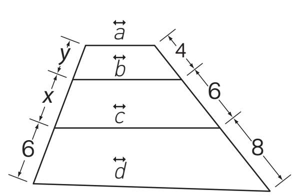


Figura 7

b. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s} \parallel \overleftrightarrow{t} \parallel \overleftrightarrow{u} \parallel \overleftrightarrow{v}$

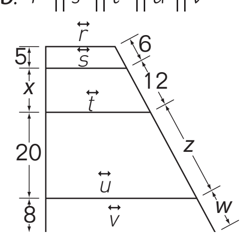


Figura 8

c. $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{p} \parallel \overleftrightarrow{q}$

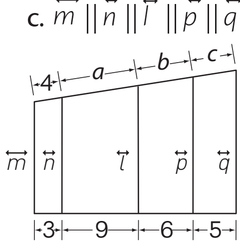


Figura 9

d. $\overleftrightarrow{e} \parallel \overleftrightarrow{f} \parallel \overleftrightarrow{g} \parallel \overleftrightarrow{h}$

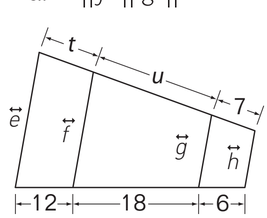


Figura 10

Razonamiento

7 Contesta las siguientes preguntas.

a. Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes congruentes, ¿son semejantes?

b. Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales, ¿son semejantes?

8 Analiza y responde.

- ¿Qué valor debe tener k para que el triángulo MNO sea semejante al triángulo PQR?

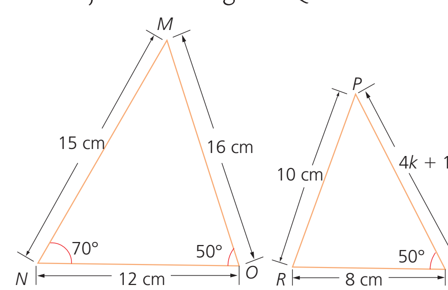


Figura 11

Resolución de problemas

9 Sabiendo que Patricia tiene una altura de 158 cm, halla la altura de la farola de la Figura 12.

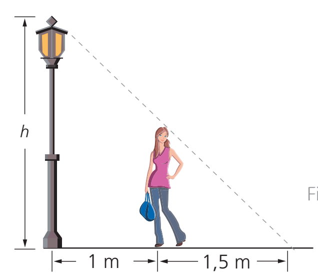


Figura 12

10 Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm por 2,5 cm. Si se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm, ¿cuánto medirá el lado menor?

11 En un triángulo ABC, $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula los lados de un triángulo $A'B'C'$ semejante al triángulo ABC, de perímetro igual a 36 cm.

12 Una fotografía rectangular de 10 cm de base por 15 cm de altura se enmarca dejando una franja de 1 cm de ancho por todo el borde, como muestra la Figura 13. ¿Son semejantes los rectángulos que se forman al interior y al exterior?

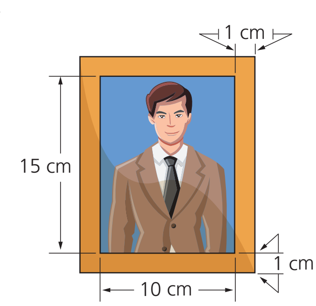


Figura 13

3 Criterios de semejanza de triángulos

Explora

Observa las figuras 1 y 2.

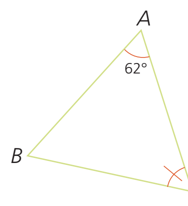


Figura 1

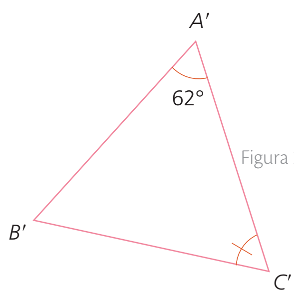


Figura 2

- ¿Es posible determinar si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes?

Al superponer los triángulos de tal forma que el $\measuredangle C$ coincida con el $\measuredangle C'$, se observa que los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en posición de Tales (Figura 3) porque:

1. $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$, ya que tales ángulos son comunes a ambos triángulos.
2. $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{A'B'}$, pues los ángulos correspondientes A y A' son congruentes.

Luego, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

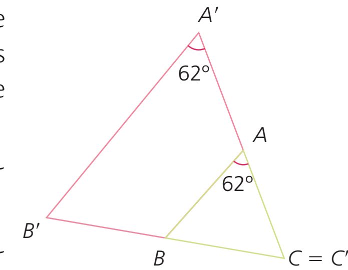


Figura 3

Para determinar si dos **triángulos son semejantes**, basta con comprobar si cumplen algunos criterios que exigen menos condiciones que la definición.

- **Criterio 1: Ángulo — Ángulo (AA)**

  Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen dos de sus ángulos correspondientes congruentes.

Ejemplo 1

Los triángulos de la Figura 4, son semejantes, pues cumplen el criterio ángulo-ángulo.

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$
$\measuredangle B \cong \measuredangle B'$

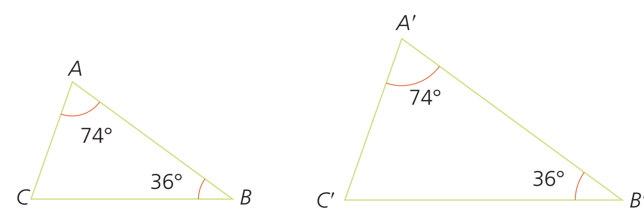


Figura 4

- **Criterio 2: Lado — Ángulo — Lado (LAL)**

  Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.

Ejemplo 2

Al observar la Figura 5, se puede afirmar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ya que se cumple el criterio 2. La razón de proporcionalidad es $\frac{2}{3}$.

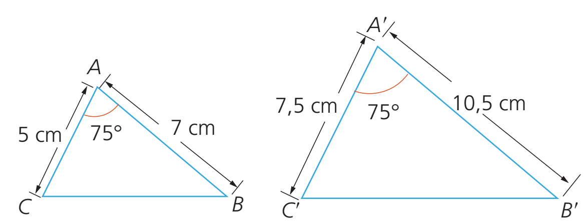


Figura 5

- **Criterio 3: Lado — Lado — Lado (LLL)**

  Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Ejemplo 3

Los lados del triángulo $A'B'C'$ de la Figura 6 miden el doble que los lados correspondientes del triángulo ABC, por lo cual se cumple que los lados de los triángulos son proporcionales.

Según el criterio LLL, se deduce que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

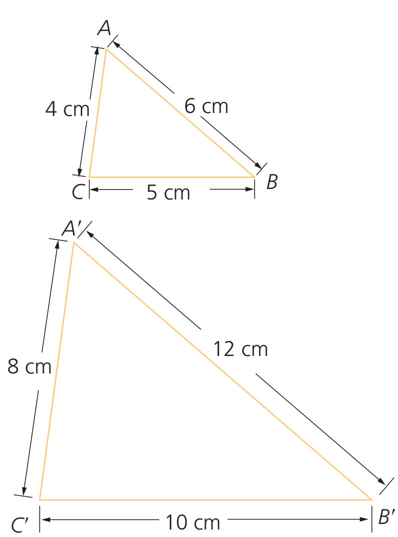


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar figuras geométricas semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Lee y resuelve.

- En un triángulo *ABC*, m∡*A* = 35°, *AB* = 3 cm y *AC* = 6 cm. En otro triángulo *DEF*, m∡*D* = 35°, *DE* = 6 cm y *DF* = 12 cm. ¿Son los triángulos *ABC* y *DEF* semejantes?

Solución:

Los dos triángulos tienen, respectivamente, un ángulo congruente: ∡*A* ≅ ∡*D*.

Los lados correspondientes que determinan tales ángulos son proporcionales:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{12}.$$

Por tanto, según el criterio 3, △*ABC* ∼ △*DEF*.

CULTURA del Buen Vivir

La curiosidad

La curiosidad es el valor que nos lleva a aventurar y descubrir cosas nuevas en la vida.

- Escribe una situación donde tu curiosidad pueda enriquecer los conocimientos de tus compañeros y los tuyos.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Determina si cada par de triángulos son semejantes o no. Indica el criterio que aplicaste en caso de que lo sean.

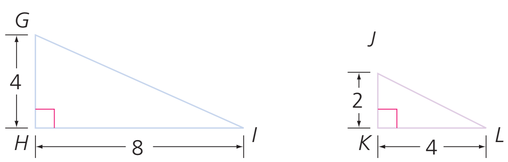
a.


Figura 7

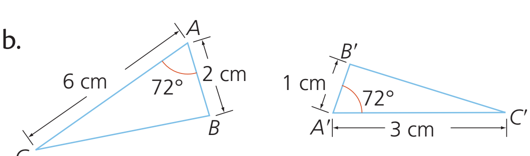
b.


Figura 8

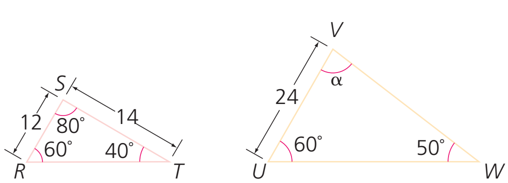
c.


Figura 9

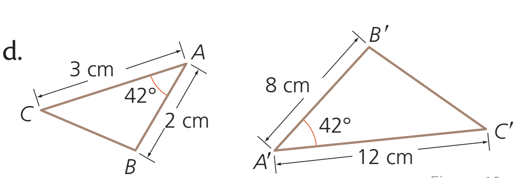
d.


Figura 10

Razonamiento

3 Construye un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mida 52°, y otro triángulo isósceles cuyos ángulos congruentes midan 64° cada uno. ¿Son semejantes los dos triángulos construidos?

Ejercitación

4 Observa la Figura 11 y calcula *AD* y *DE*, si se sabe que *DE* es paralelo a *BC*.

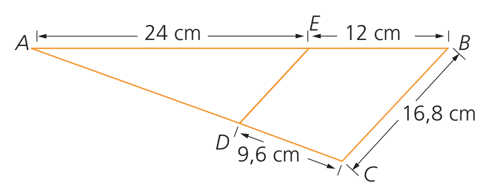


Figura 11

5 Sabiendo que *a* y *b* son paralelas, halla sus medidas.

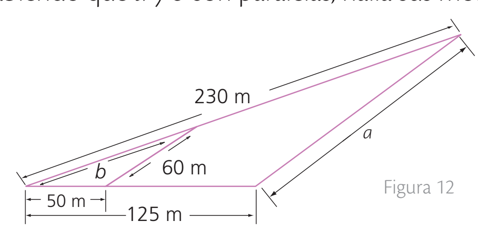


Figura 12

Resolución de problemas

6 En la Figura 13 los triángulos *ACD* y *CBD* son semejantes. ¿Cuánto mide *h*?

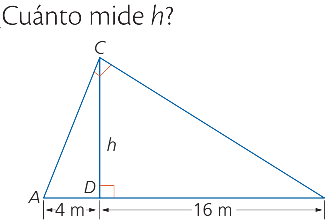


Figura 13

7 Calcula la altura de la torre de la iglesia.

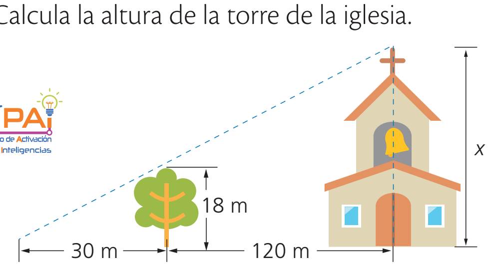


Figura 14

4 Construcción de polígonos semejantes

Explora

Paula quiere saber cómo puede construir una figura semejante a otra dada.

- ¿Qué debe hacer Paula?

Paula debe seguir los siguientes pasos para construir polígonos semejantes.

1. Dado un polígono cualquiera, se trazan las semirrectas que unen un vértice con todos los demás. En la Figura 1 se trazaron las semirrectas a partir del vértice *A*; de esta manera, se obtiene el polígono *ABCDE* descompuesto en triángulos.

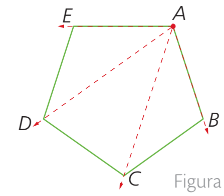


Figura 1

2. A partir del vértice *A* se mide la longitud del lado del polígono que va a ser semejante al polígono dado y se ubica un punto. Desde ese punto se trazan paralelas a los lados del polígono. En la Figura 2 se observa el polígono $A'B'C'D'E$, el cual es semejante al polígono *ABCDE*.

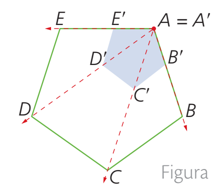


Figura 2

Los polígonos son semejantes porque los triángulos en los que están descompuestos estos polígonos están en posición de Tales.

Para construir un **polígono semejante** a otro, se descompone en triángulos y con el método de Tales se construyen otros semejantes.

Ten en cuenta

A partir de la definición de triángulos semejantes, se puede deducir una para polígonos semejantes:

"Dos **polígonos son semejantes** si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes congruentes".

4.1 Razón de semejanza de figuras y áreas

Si dos figuras son semejantes con **razón** de semejanza *k*, la **razón de sus perímetros** es *k* y la **razón de sus áreas** es k^2.

Ejemplo 1

Dado el cuadrado *ABCD*, se dibuja el cuadrado $A'B'C'D'$ semejante al de la Figura 3 con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$.

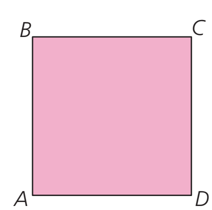


Figura 3

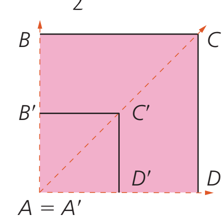


Figura 4

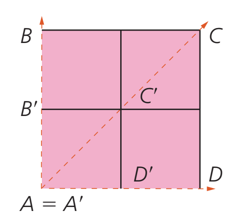


Figura 5

En la Figura 5 se observa que el cuadrado $A'B'C'D'$ está contenido cuatro veces en el cuadrado *ABCD*; por tanto, la razón entre sus áreas es:

$$\frac{\text{Área } A'B'C'D'}{\text{Área } ABCD} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = k^2$$

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_5e.html

Aprende más acerca de la relación entre las áreas de dos figuras semejantes.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Construye un triángulo $A'B'C'$ semejante a un triángulo equilátero *ABC* de lado 3 cm con razón de semejanza $k = \frac{1}{3}$, y estudia la relación entre sus áreas.

Solución:

Se construye el lado $\overline{AB}'$ sobre el lado $\overline{AB}$ de manera que $\overline{AB}' = 1$ cm, y se traza la paralela al lado $\overline{BC}$ (Figura 6). Como el $\triangle ABC$ contiene nueve veces el $\triangle A'B'C'$, la razón entre las áreas es:

$$\frac{\text{Área } A'B'C'}{\text{Área } ABC} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

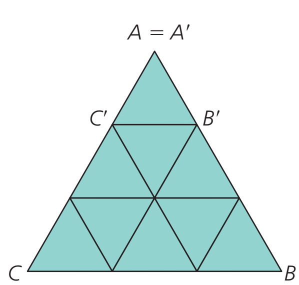


Figura 6

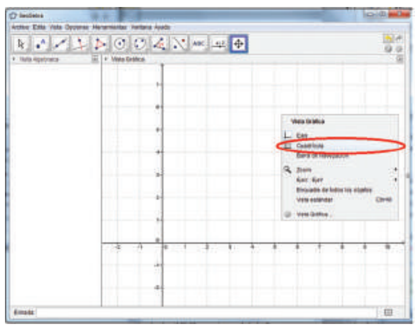
Destrezas con criterios de desempeño: Definir e identificar polígonos semejantes de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, utilizando la tecnología.
Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas.

MatemaTICS

Construye polígonos en GeoGebra

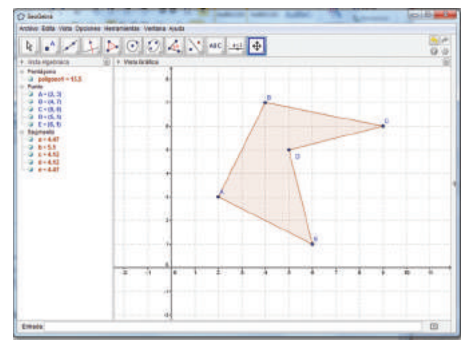
En GeoGebra puedes construir polígonos de cualquier número de lados apoyándote en la cuadrícula, con el procedimiento que se muestra a continuación.

- Haz clic derecho en la vista gráfica de GeoGebra y selecciona la opción *Cuadrícula*. En la pantalla se observa lo siguiente:



- Haz clic en el icono y marca un punto sobre la cuadrícula, el cual quedará etiquetado como *A*.

- Marca cuatro puntos más en distintos lugares de la cuadrícula. Finaliza haciendo clic en el punto *A*; de esta manera, quedará construido el polígono *ABCDE*, que tiene cinco lados.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la razón de las áreas de dos cuadrados semejantes con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.

3 Construye una cometa de lados 1,5 veces mayores que los de la Figura 7.

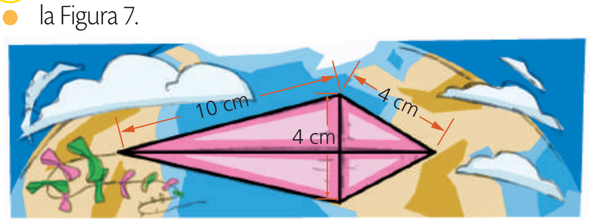


Figura 7

4 Copia en tu cuaderno el paralelogramo de la Figura 8 y construye un polígono semejante con razón de semejanza 3. Explica con el dibujo cuál es la razón de sus áreas.

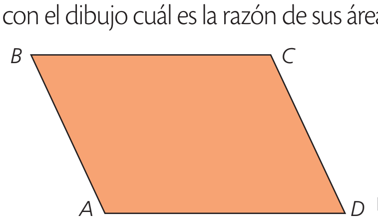


Figura 8

5 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura 9, de modo que la razón de sus áreas sea $\frac{25}{4}$.

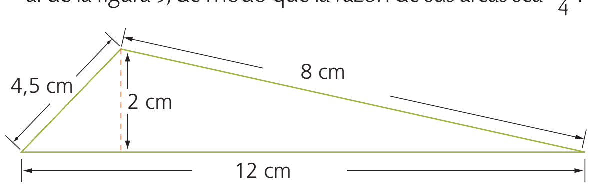


Figura 9

6 Halla la razón de semejanza, si se conoce que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es $\frac{16}{9}$.

Resolución de problemas

7 Un edificio proyecta una sombra de 80 m. El mismo día y a la misma hora, un palo vertical de 24 m de largo proyecta una sombra de 20 m. Calcula la altura del edificio.

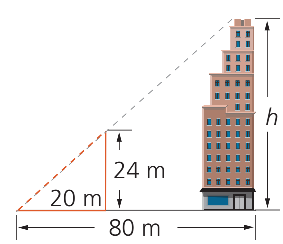


Figura 10

8 Calcula la anchura del río.

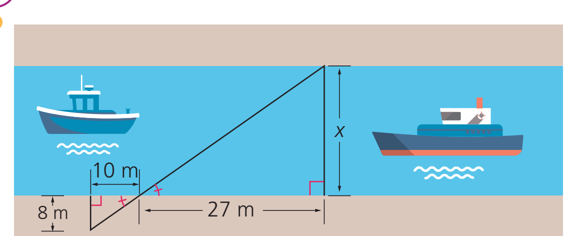


Figura 11

9 El perímetro de un triángulo equilátero es 30 cm. Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a este, si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

5 Líneas de simetría en figuras geométricas

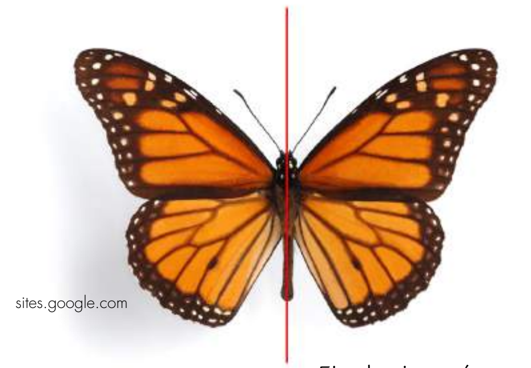
Explora

¿Dónde podríamos trazar una línea en este trébol para obtener dos figuras exactamente iguales?



Parte de los elementos de la naturaleza que nos rodean presentan una propiedad muy interesante, esta consiste en que si dividimos el elemento por un lugar especial en dos partes, las dos mitades son iguales.

Si dibujamos una línea a lo largo de una figura y observamos que las dos partes son iguales, entonces habremos encontrado su línea de simetría.



CULTURA del Buen Vivir

La curiosidad

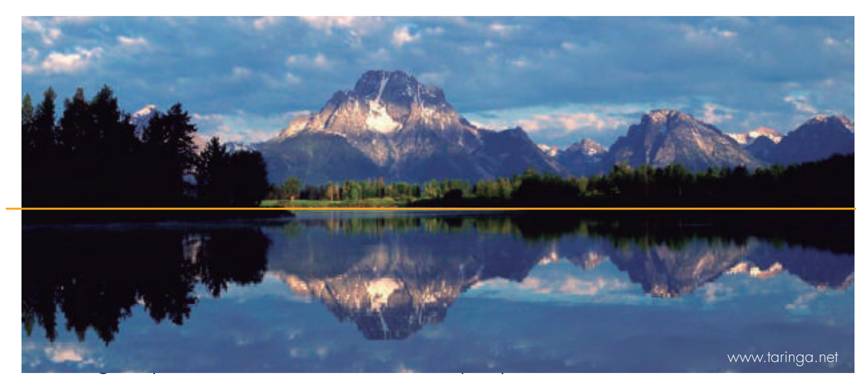
La persona curiosa encuentra cosas que le interesan prácticamente en cualquier parte. Es capaz de hacer que una tarea, que en principio parece aburrida, se convierta en algo interesante.

- Describe una de las actividades que haya propuesto tu profesor de matemática para enseñar o reforzar un tema y que haya despertado tu curiosidad y tus ganas de aprender.

Llamamos línea de simetría a la recta que permite dividir una figura en dos partes cuyos elementos son equidistantes, que tienen la misma forma y dimensiones.

Ejemplo 1

Esto podemos observar cuando nos ubicamos frente a un espejo o cuando observamos un reflejo en el agua.



Las figuras geométricas pueden tener una o más líneas de simetría que a su vez pueden ser horizontales, verticales o diagonales.

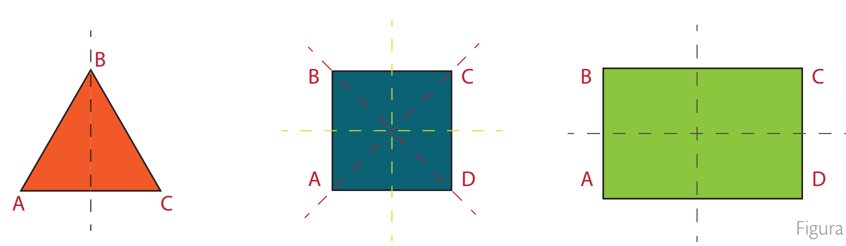


Figura 1

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completar o resolver figuras geométricas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

1 Verifica las siguientes afirmaciones:

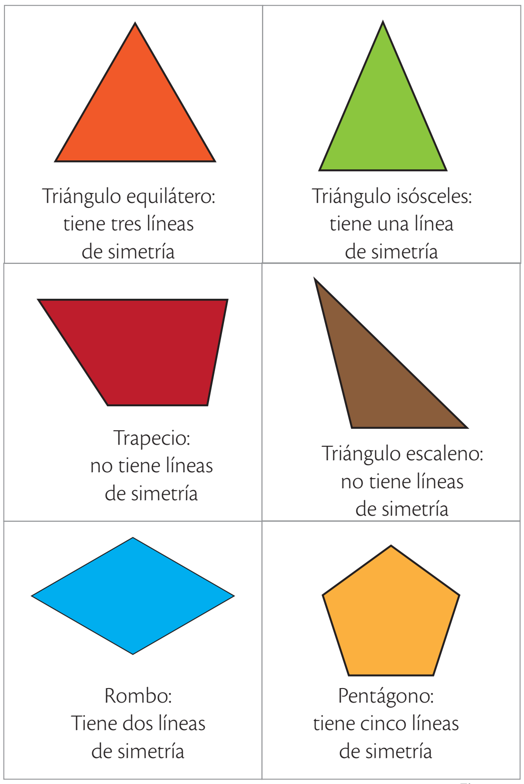


Figura 2

2 Completa la otra mitad, para que la figura sea simétrica con respecto a la línea de simetría trazada.

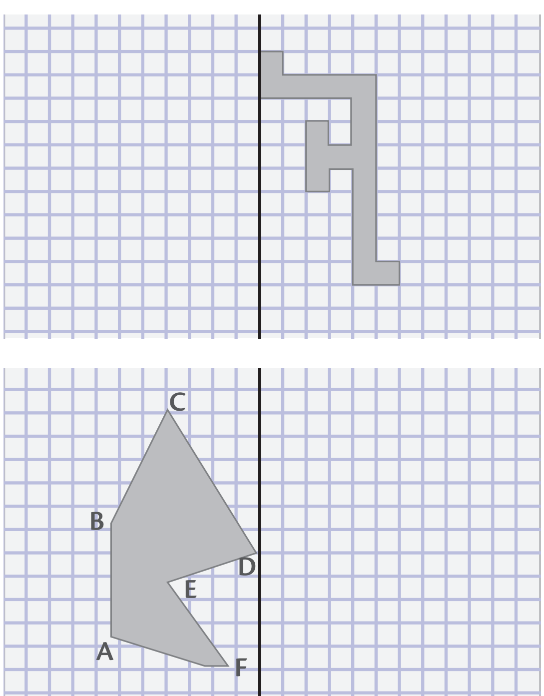


Figura 3

3 Traza los ejes de simetría que sean posibles en cada una de las figuras.

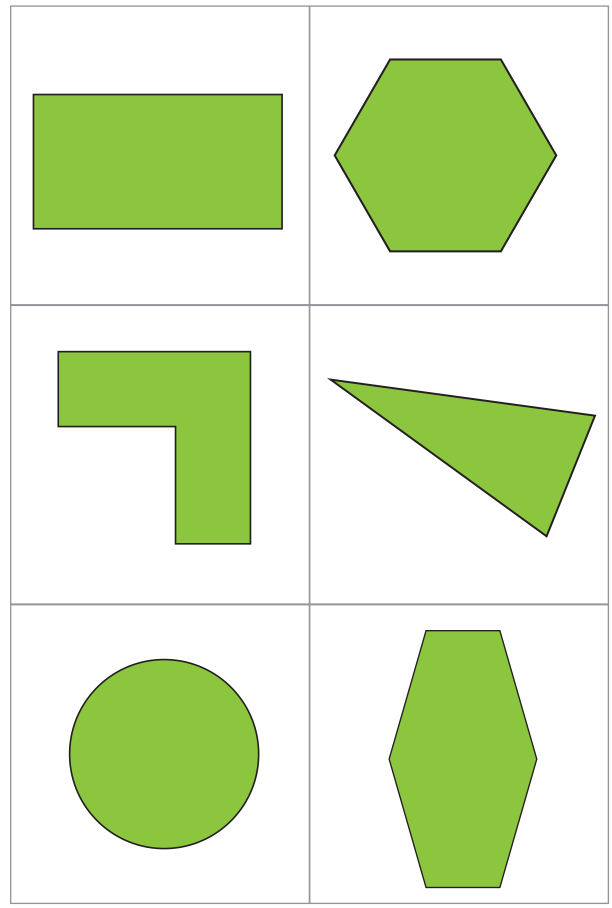
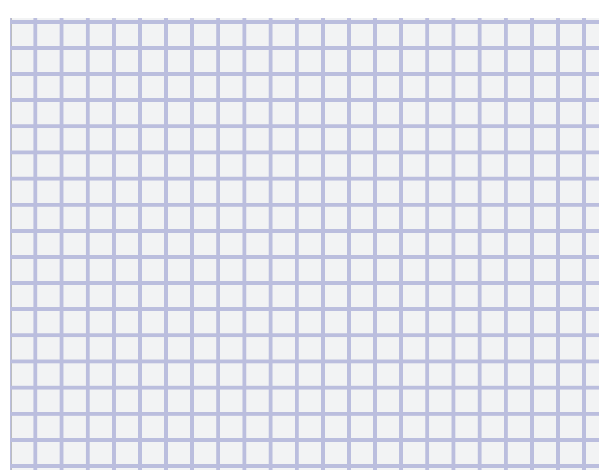


Figura 4

4 Dibuja una figura simétrica y traza su línea de simetría.



6 Homotecias

Explora

Natalia escribió en una hoja la letra inicial de su nombre como se muestra en la Figura 1.



Figura 1

- Si Natalia amplió su dibujo en la fotocopiadora al 120%, ¿qué crees que observó al comparar las dos hojas?

Al comparar la fotocopia con el original, Natalia observó que obtuvo una letra N semejante a la que había dibujado en el papel, es decir, con la misma forma pero con diferente tamaño (en este caso más grande, ya que amplió su dibujo al 120%).

Si se trazan rectas que contengan los puntos ampliados con los correspondientes originales, se observa que todas concurren en un mismo punto *O*, que sería el centro de la homotecia (Figura 2).

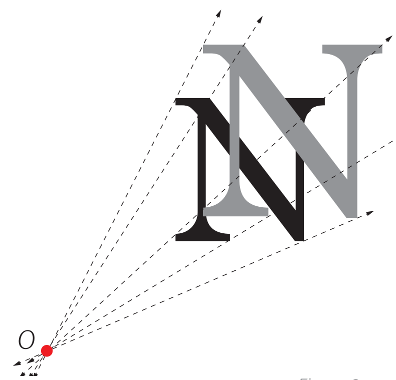


Figura 2

Una **homotecia** es una transformación que se realiza sobre una figura en el plano con el fin de obtener **figuras semejantes** a la dada. Para efectuar una homotecia, se debe elegir un centro denominado **foco** y un **factor de proporcionalidad** o **razón de la homotecia**.

Ejemplo 1

Para obtener un polígono semejante al triángulo *ABC* de la Figura 3 mediante una homotecia con centro en el punto *O* y factor de proporcionalidad 2, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se trazan semirrectas desde el foco de la homotecia (*O*) a cada uno de los vértices del triángulo.

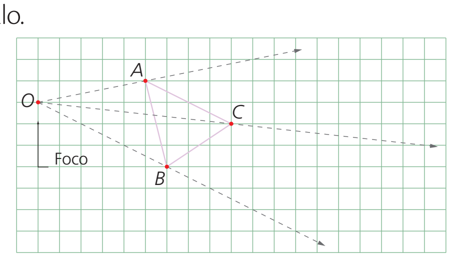


Figura 3

2. Se miden las distancias (*d*) del foco a cada uno de los vértices del polígono.

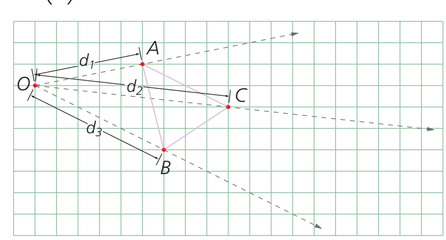


Figura 4

3. Se multiplica cada distancia por el factor de proporcionalidad 2. Finalmente, se marcan sobre las semirrectas las distancias obtenidas ($2 \cdot d$) y se traza el polígono imagen.

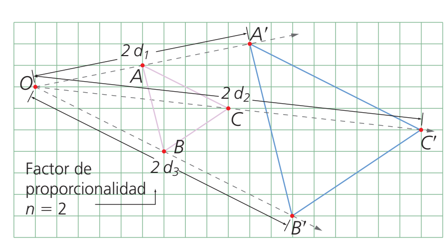


Figura 5

Los triángulos *A′B′C′* y *ABC* de la Figura 5 son semejantes. Como el factor de proporcionalidad es 2, entonces los lados del triángulo *A′B′C′* miden el doble que los lados del triángulo *ABC*.

Ten en cuenta

Cuando el factor de proporcionalidad es negativo, el centro de la homotecia queda situado entre el punto y su imagen (observa la Figura 6).

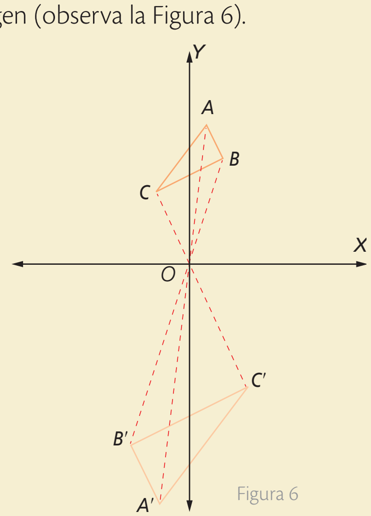


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Aplica al triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(5, 1)$ una homotecia con centro en el punto (0, 0) y factor de proporcionalidad 2.

Solución:

Como la razón de homotecia es 2 y el foco está en (0, 0), basta con multiplicar las coordenadas de cada vértice del triángulo ABC por 2 para obtener las coordenadas de los vértices del triángulo semejante obtenido mediante la homotecia.

$A' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$

$B' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1) = (4, 2)$

$C' = (2 \cdot 5, 2 \cdot 1) = (10, 2)$

En la Figura 7 se observa el triángulo ABC y su imagen $A'B'C'$ mediante una homotecia.

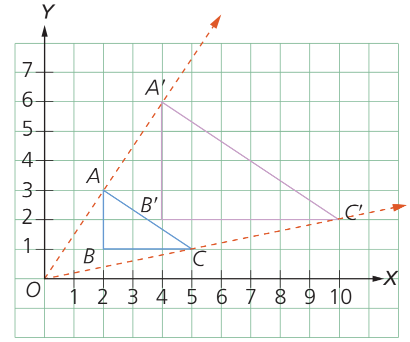


Figura 7

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa el proceso para aplicar la homotecia con foco en O y factor de proporcionalidad 2, al triángulo ABC de la Figura 8. Traza el polígono imagen $A'B'C'$.

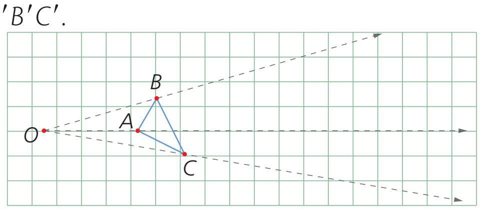


Figura 8

$n = 2$

$OA = 2$ cm → $OA' =$ ______

$OB = 2{,}5$ cm → $OB' =$ ______

$OC = 3$ cm → $OC' =$ ______

3 Aplica a cada polígono las homotecias indicadas, con foco en el punto dado.

a.

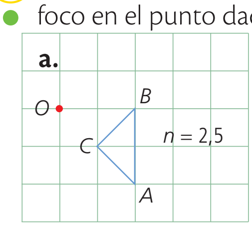


Figura 9

b.

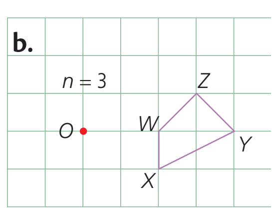


Figura 10

c.

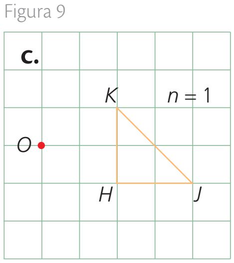


Figura 11

d.

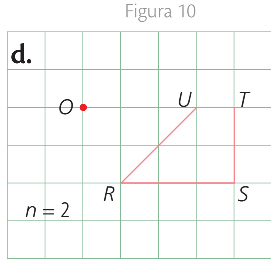


Figura 12

4 Aplica una homotecia de centro (0, 0) y factor de proporcionalidad $\frac{1}{2}$, al polígono cuyos vértices son (2, 2), (2, 6), (6, 2) y (6, 6).

Razonamiento

5 Halla las coordenadas del triángulo semejante al triángulo ABC cuyos vértices son $A(0, 2)$, $B(2, 1)$ y $C(1, 4)$, mediante la homotecia indicada en cada caso.

a. Centro (4, 4) y factor de proporcionalidad −2.

b. Centro (1, 3) y factor de proporcionalidad 3.

c. Centro (2, 0) y factor de proporcionalidad 2.

6 Dibuja en tu cuaderno la figura semejante al hexágono $ABCDEF$ de la Figura 13, con factor de proporcionalidad $\frac{3}{2}$ y centro de semejanza el punto O.

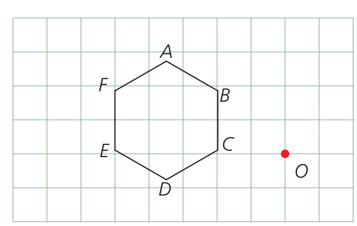


Figura 13

Resolución de problemas

7 Un publicista elabora una valla publicitaria en la que aparece una etiqueta en forma de cometa cuyas dimensiones son 12 cm, 12 cm, 15 cm y 15 cm. Si decide presentar en la valla la etiqueta normal, aplicando homotecias en factores de proporcionalidad 0,25; 1,5 y 3, respectivamente, ¿cuál sería la presentación de la etiqueta y sus copias en la valla publicitaria?

7 Perímetro de figuras planas

Explora

Lucas debe delimitar la cancha de fútbol de la Figura 1 usando una cinta blanca.

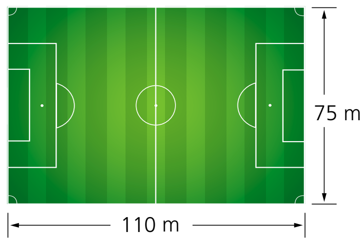


Figura 1

- ¿Qué longitud de cinta debe comprar?

Para determinar la cantidad de metros de cinta que Lucas debe comprar, es necesario sumar la longitud de todos los lados de la cancha, así:

$$110 \text{ m} + 75 \text{ m} + 110 \text{ m} + 75 \text{ m} = 370 \text{ m}$$

Entonces, Lucas debe comprar 370 m de cinta.

El **perímetro de una figura** plana es la suma de las medidas de todos sus lados.

Ejemplo 1

Observa cómo se halla el perímetro del polígono de la Figura 2.

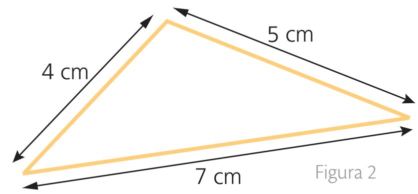


Figura 2

$P = 4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

Ejemplo 2

Una costurera diseña manteles triangulares de 25 cm de lado. Para saber cuántos metros de encaje necesita para bordear cada mantel, ella debe hallar su perímetro. Lo calcula así:



$P = 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 75 \text{ cm}$

Por lo tanto, la costurera necesita 75 cm de encaje en cada uno de los manteles.

Ejemplo 3

Para la celebración del día de la independencia, en el interior de cada uno de los salones de un colegio se va a poner una bandera por todo el contorno. Si cada salón de clase tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 6 m, en total se necesitarán $6 \text{ m} + 6 \text{ m} + 6 \text{ m} + 6 \text{ m} = 24 \text{ m}$ de bandera por salón.

Ten en cuenta

Para calcular el perímetro de cualquier polígono debes convertir todas las medidas de sus lados a la misma unidad de longitud.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina el perímetro del polígono de la Figura 3.

Solución

Para hallar el perímetro de la figura, se suman todas las longitudes dadas.

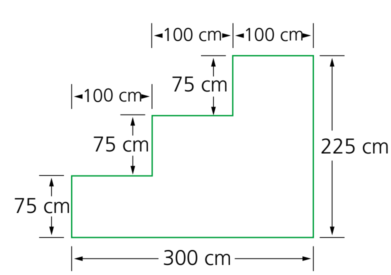


Figura 3

$P = 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 75 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 225 \text{ cm} + 300 \text{ cm}$

$P = 1050 \text{ cm}$

App

Medición de alturas y distancias

Abre la aplicación *Telémetro: Smart Measure* y mide la altura y la distancia de diversos objetos.



Destrezas con criterios de desempeño: Calcular el perímetro de triángulos en la resolución de problemas.
Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de polígonos irregulares.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina el perímetro de cada polígono

a.

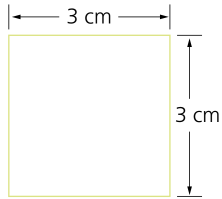


Figura 4

$P =$ ______

$P =$ ______ cm

b.

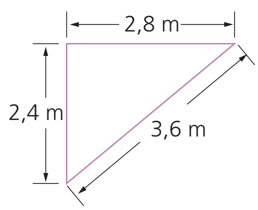


Figura 5

$P =$ ______

$P =$ ______ cm

c.

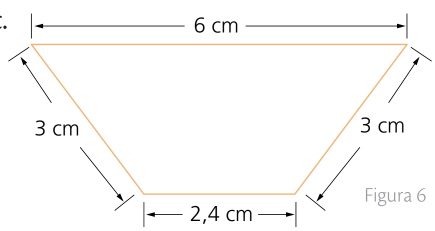


Figura 6

$P =$ ______

$P =$ ______ cm

d.

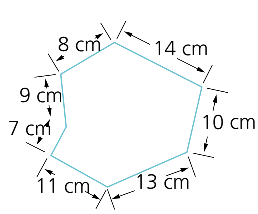


Figura 7

$P =$ ______

$P =$ ______ cm

3 Expresa el perímetro de la Figura 8 en metros.

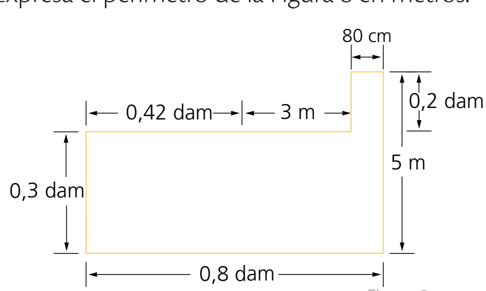


Figura 8

Razonamiento

4 Escribe el dato que falta en las figuras 9 y 10 para que tengan 92 m y 115 m de perímetro, respectivamente.

a.

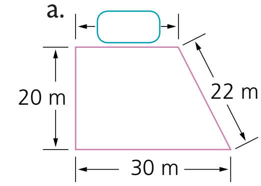


Figura 9

b.

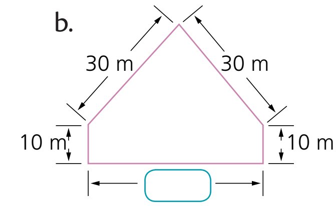


Figura 10

5 Responde.

a. ¿Es mayor el perímetro de un heptágono regular de lado 8 cm o el de un octágono de 7 cm de lado?

b. ¿Cuál es el perímetro, en metros, de un pentágono regular de 358 cm de lado?

Resolución de problemas

6 Alba le da cincuenta vueltas diarias al jardín que se muestra en la Figura 11.

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

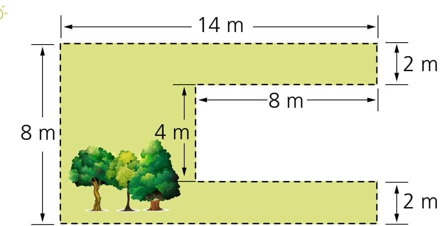


Figura 11

a. ¿Cuántos kilómetros recorre en dos días?

b. ¿Cuántos metros recorre de lunes a viernes?

c. Si mantiene su ritmo diario, ¿en cuántos días completará 9 kilómetros?

d. Si ella entrena durante cada uno de los días de junio, ¿cuántas vueltas completas y cuántos kilómetros recorre ese mes?

7 Un terreno tiene la forma de un triángulo equilatero de 30 m por lado. ¿Cuántas vueltas hay que dar al terreno para recorrer 270 m?

8 El Monasterio de El Escorial tiene una estructura rectangular de 2 070 dm de largo y de 16 100 cm de ancho. Si se deben ubicar banderas alrededor de él, una por cada metro de distancia incluyendo los vértices, ¿cuántas banderas se necesitarán?



8 Unidades de superficie

Explora

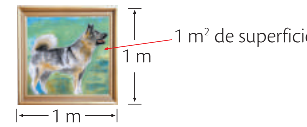
Catalina tiene un cuadro de su perro y desea colgarlo en la pared de la sala, pero no sabe si cabe en el espacio que tiene destinado para ello.



- Si cada lado del cuadro mide un metro, ¿cuánto espacio necesitará Catalina para colgar su cuadro?

8.1 Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

El cuadro de Catalina tiene forma de cuadrado y como cada uno de sus lados mide 1 m de longitud; entonces se dice que cubre una superficie de 1 metro cuadrado.



La unidad de medida de la superficie es el **metro cuadrado** (m^2), a partir de la cual se definen unidades de medida mayores, llamadas **múltiplos del metro cuadrado** y otras menores, denominadas **submúltiplos del metro cuadrado.**

En la Tabla 1 se muestran las equivalencias respecto al metro cuadrado.

Unidades de superficie						
Múltiplos			Unidad básica	Submúltiplos		
kilómetro cuadrado (km^2)	hectómetro cuadrado (hm^2)	decámetro cuadrado (dam^2)	metro cuadrado (m^2)	decímetro cuadrado (dm^2)	centímetro cuadrado (cm^2)	milímetro cuadrado (mm^2)
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	$\frac{1}{100}$ m^2	$\frac{1}{10\,000}$ m^2	$\frac{1}{1\,000\,000}$ m^2

Tabla 1

Cada unidad de superficie equivale a cien veces la unidad del orden inmediatamente inferior.

Ten en cuenta

Las civilizaciones antiguas tenían unidades de superficie diferentes a las utilizadas en la actualidad. Por ejemplo, en Egipto se utilizaban las siguientes:

1 cubit = 27,35 m^2

1 khet cuadrado = 100 cubit

8.2 Conversión de unidades de superficie

- Para pasar de una unidad de orden inferior a la siguiente de orden superior, se divide entre 100.
- Para pasar de una unidad de orden superior a la siguiente de orden inferior, se multiplica por 100.

Ejemplo 1

Para expresar 6,7 dam^2 en m^2 se cuenta la cantidad de lugares que hay entre la unidad dada y la unidad en la que se quiere expresar la medida; como hay un lugar, se multiplica por 100, así: 6,7 dam^2 = (6,7 · 100) m^2 = 670 m^2

Ejemplo 2

Para expresar 112 cm^2 en m^2 se divide entre 10 000 porque hay dos lugares entre cm^2 y m^2. De esa forma: 112 cm^2 = (112 ÷ 10 000) m^2 = 0,0112 m^2.

Ejemplo 3

El propietario de una finca cafetera de 1 350 000 m^2 dedica al cultivo del café cuatro quintas partes de la superficie y el 30% del resto a una bodega rectangular en la que almacena los sacos de café. Para saber cuántos hm^2 se destinan al cultivo del café y cuántos a su almacenamiento se convierten los 1 350 000 m^2 a hm^2. Así: 1 350 000 ÷ 10 000 = 135 hm^2.



El cultivo cubre una superficie de $\left(\frac{4}{5} \cdot 135\right)$ hm^2 = 108 hm^2. Como quedan disponibles 135 hm^2 − 108 hm^2 = 27 hm^2, se calcula el 30% de esta superficie así: $\left(\frac{30}{100} \cdot 27\right)$ hm^2 = 8,1 hm^2, que corresponden al área de la bodega.

Destrezas con criterios de desempeño: Realizar conversiones simples de medidas de longitud del metro, múltiplos y submúltiplos en la resolución de problemas. Reconocer el metro cuadrado como unidad de medida de superficie, los submúltiplos y múltiplos, y realizar conversiones en la resolución de problemas .

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Relaciona cada unidad de medida, con la conversión solicitada.

a. 24 m^2 a cm^2	b. 24 mm^2 a cm^2	c. 24 dam^2 a cm^2
( ) 24 000 000 cm^2	( ) 0,24 cm^2	( ) 240 000 cm^2

Solución:

(c) 24 000 000 cm^2 (b) 0,24 cm^2 (a) 240 000 cm^2

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escoje la medida equivalente a la que se da en cada caso.

a. 92 dm^2
- 9 200 m^2
- 9 200 cm^2
- 920 cm^2

b. 101 hm^2
- 10 100 dm^2
- 101 000 cm^2
- 1 010 000 m^2

3 Multiplica adecuadamente para expresar cada medida en las unidades de orden inferior que se indican.

a. 358 cm^2 en mm^2

b. 9 131 dm^2 en mm^2 y cm^2

c. 3 251 hm^2 en dm^2 y en cm^2

d. 25 328 m^2 en cm^2 y en dm^2

4 Divide apropiadamente para expresar cada medida en las unidades de orden superior que se indican.

a. 429 dam^2 en hm^2 y en km^2

b. 937 mm^2 en dm^2 y en hm^2

c. 741 cm^2 en dm^2 y en dam^2

d. 15 345 dm^2 en m^2 y en hm^2

Comunicación

5 Expresa cada medida de área en la unidad indicada.

a. 35 dam^2 = ______ cm^2

b. 28 dm^2 = ______ mm^2

c. 345 m^2 = ______ dam^2

d. 5 245 dm^2 = ______ hm^2

e. 65 km^2 = ______ m^2

f. 0,53 hm^2 = ______ dam^2

Resolución de problemas

6 Un campo de 15 000 m^2 se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuántos dam^2 mide cada parte?

7 El suelo de una habitación mide 24 m^2 y está cubierto completamente por 60 baldosas cuadradas. ¿Cuántos cm^2 mide cada baldosa?

8 Angélica compró una finca que tiene un área de 45 hectáreas. Si una hectárea equivale a 1 hm^2, ¿cuántos metros cuadrados de área tiene la finca?

9 El área de una bodega de almacenamiento de electrodomésticos es de 4 dam^2 de superficie. ¿Cuántas baldosas de 1 m^2 y de 1 dm^2, respectivamente, se necesitan para adoquinarla?

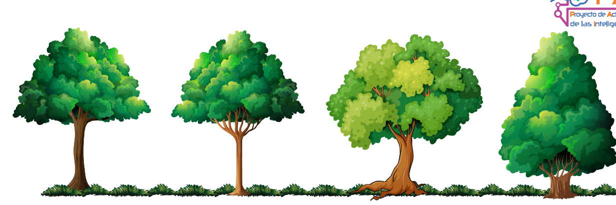
10 ¿Cuántas personas caben de pie en un patio de 60 m^2 si cada persona ocupa una superficie de 20 dm^2?

11 La superficie de la Tierra es de 5 100 720 mam^2, de la cual $\frac{3}{4}$ partes están cubiertas por los océanos, ríos y lagunas. ¿Cuántos km^2 corresponden a la superficie de tierra firme si 1 mam^2 = 100 km^2?

12 En un despacho rectangular de 4 m de largo por 3 m de ancho se pone en el centro una alfombra, de forma que a su alrededor queda una franja de suelo de 50 cm de ancho. ¿Cuál es la superficie de la alfombra?

13 Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita 4 m^2 para desarrollarse.

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias



9 Área de figuras planas

Explora

Laura debe dibujar como tarea tres rectángulos diferentes, cada uno con 18 cm de perímetro.



- ¿Cuál de los rectángulos que dibujó tiene la mayor área?

Para determinar el área de los rectángulos se deben multiplicar sus dimensiones; es decir, la base por la altura. La Figura 1 muestra los rectángulos dibujados por Laura junto con la medida de su área.

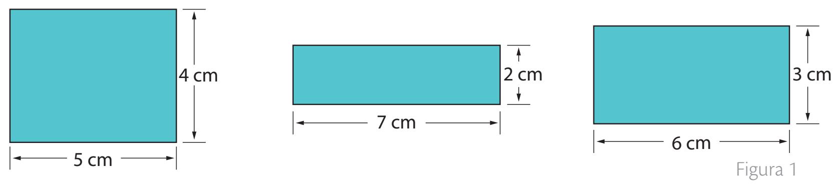


Figura 1

$A = 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$; $A = 7\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 14\text{ cm}^2$; $A = 6\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 18\text{ cm}^2$

Por lo tanto, el rectángulo de base 5 cm y altura 4 cm es el de mayor área.

El **área de una región** o **figura** es la medida de su superficie. Se denota *A*.

En la Tabla 1 se muestra cómo determinar el área de algunas figuras mediante el uso de fórmulas.

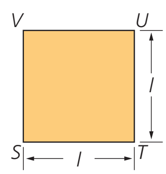
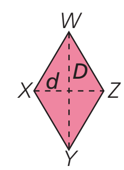
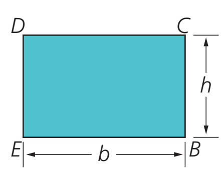
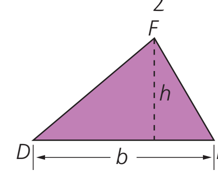
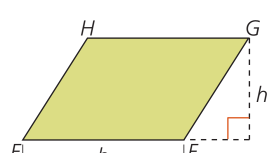
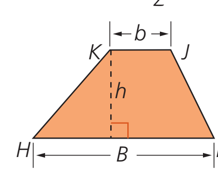
Área de algunas figuras planas	
Cuadrado $A = l \cdot l$ 	Rombo $A = \frac{d \cdot D}{2}$ 
Rectángulo $A = b \cdot h$ 	Triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$ 
Paralelogramo $A = b \cdot h$ 	Trapecio $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ 

Tabla 1

Ejemplo 1

La Figura 2 muestra un rombo y la longitud de sus dos diagonales. La medida de su superficie se calcula así:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

$$A = \frac{2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} \Rightarrow A = 3\text{ cm}^2$$

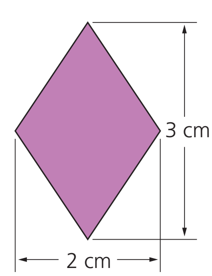


Figura 2

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://recursos.cepindalo.es/mod/book/tool/print/index.php?id=1101#ch573

Calcula el área de figuras planas empleando el geoplano

Destrezas con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas.
Calcular el área de figuras planas en la resolución de problemas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Halla el área de la cancha de fútbol de la Figura 3.

Solución:

El área se determina multiplicando las medidas del largo y el ancho.

$$A = 110\ \text{m} \cdot 75\ \text{m} = 8\,250\ \text{m}^2$$

Entonces, la cancha de fútbol tiene un área de $8\,250\ \text{m}^2$.

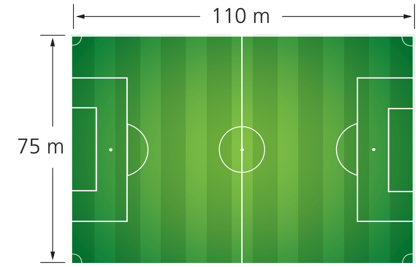


Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el área de cada figura.

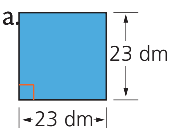
a.


Figura 4

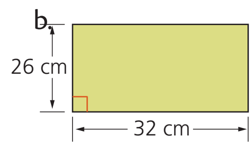
b.


Figura 5

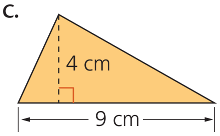
c.


Figura 6

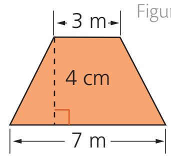
d.


Figura 7

Comunicación

3 Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a. Una piscina de 6 m de largo por 5 m de ancho tiene un área de $300\,000\ \text{cm}^2$.

b. El área de una azotea es de $600\ \text{dm}^2$ y es equivalente a la cuarta parte del terreno de una casa de $240\ \text{m}^2$.

c. El área de un cuadro de 10 m de largo por 0,05 cm de ancho es $500\ \text{m}^2$.

d. El área de un triángulo es igual al producto de su base por su altura.

Razonamiento

4 Sandra usó fichas cuadradas para construir un rectángulo. El perímetro del rectángulo que construyó era de 14 unidades. ¿Cuántas fichas cuadradas puede haber usado Sandra para todo el rectángulo?

5 Sebastián desea cultivar papa, para lo cual dispone de dos terrenos cuyas dimensiones se muestran en las figuras 8 y 9. Su esposa le dice que en cualquiera de los dos terrenos cultivaría la misma cantidad, porque los dos tienen igual perímetro. ¿Crees que ella tiene razón? Explica.

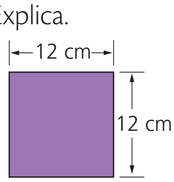


Figura 8

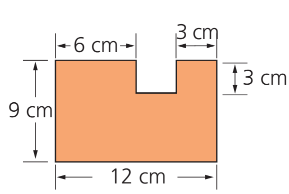


Figura 9

6 Halla el área de cada uno de los polígonos que forman el terreno de la Figura 10 y responde las preguntas.

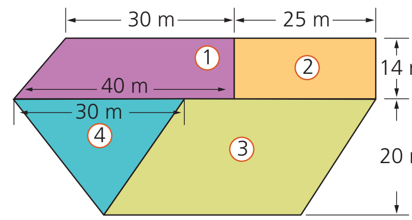


Figura 10

a. ¿Cuál es el área total del terreno en hm^2?

b. ¿Cuál de las cuatro partes tiene la mayor área?

c. ¿En cuántos m^2 es mayor el área de la parte mayor que el área de la parte menor?

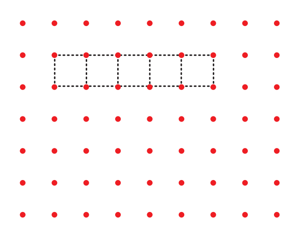
d. Si la mitad del terreno se dedica al cultivo de hortalizas y en la cuarta parte se construye un galpón, ¿cuántos dm^2 se dedican a cada actividad?

e. Si la parte de menor área entre las que se dividió el terreno se vende a razón de \$ 100 el m^2, ¿cuánto se recibe por su venta?

Resolución de problemas

7 Rosario quiere cercar su jardín cuadrado para evitar que entren los conejos. El área del jardín es de $9\ \text{m}^2$. ¿Cuántos metros de malla debe comprar para hacer el cerramiento?

8 Dibuja en la cuadrícula dos figuras más, que tengan la misma área de la que se muestra en la Figura 11.


Figura 11

Halla el perímetro de las tres figuras. ¿Qué puedes concluir?

10 Teorema de Pitágoras

Explora

Andrés tiene un telescopio con el que observa aves en el bosque, pero solo le permite visualizarlas claramente hasta 50 m.



- Si Andrés se encuentra a 25 m de un árbol y el ave que quiere ver se encuentra en su nido a una altura de 35 m, ¿puede verla con detalle con su telescopio?

Para saber si el telescopio de Andrés le deja ver con precisión el ave, es necesario hallar la distancia que lo separa de ella. La Figura 1 muestra que, en este caso, se debe hallar la medida de la diagonal de un rectángulo o, lo que es lo mismo, el lado más largo de un triángulo rectángulo.

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = (25 \text{ m})^2 + (35 \text{ m})^2$$

$$d^2 = 625 \text{ m}^2 + 1225 \text{ m}^2$$

$$d^2 = 1850 \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{1850 \text{ m}^2} = 43{,}01 \text{ m}$$

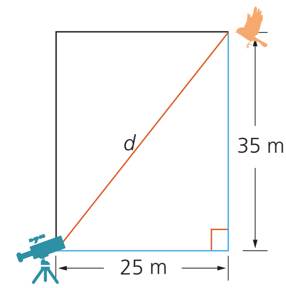


Figura 1

Como 43,01 m $<$ 50 m, el telescopio le permite ver a Andrés el ave con detalle.

Cuando se conocen las medidas de dos lados de un **triángulo rectángulo**, se puede calcular la medida del lado que falta empleando el **teorema de Pitágoras**.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos (Figura 2). Esto es: $H^2 = C_1^2 + C_2^2$

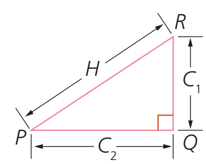


Figura 2

Ejemplo 1

Calcula el valor de la hipotenusa en el triángulo de la Figura 3.

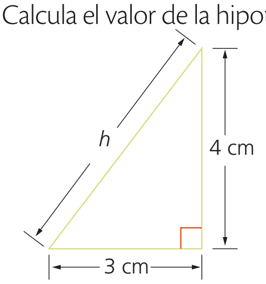


Figura 3

Se aplica el teorema de Pitágoras así:

$$h^2 = (3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2$$

$$h^2 = 9 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2$$

$$h^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{25 \text{ m}^2}$$

$$h = 5 \text{ cm}$$

Ten en cuenta

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado mayor se denomina hipotenusa (Figura 5).

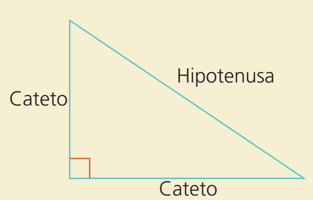


Figura 5

Ejemplo 2

Una escalera de 73 dm de longitud está apoyada sobre la pared, como muestra la Figura 4. El pie de la escalera dista 55 dm de la pared. Para saber a qué altura sobre el piso se apoya la parte superior de la escalera en la pared, se usa el teorema de Pitágoras.

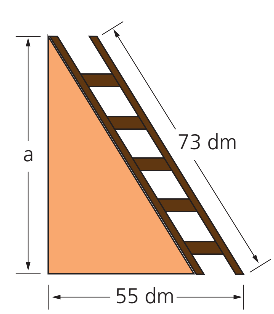


Figura 4

$(73 \text{ dm})^2 = a^2 + (55 \text{ dm})^2$, esta ecuación se puede expresar como:

$$a^2 = (73 \text{ dm})^2 - (55 \text{ dm})^2$$

$$a^2 = 5\,329 \text{ dm}^2 - 3\,025 \text{ dm}^2$$

$$a = \sqrt{2\,304 \text{ dm}^2} \Rightarrow a = 48 \text{ dm}$$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 A cierta hora del día, un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de 16 m, como se ve en la Figura 6 ¿Cuál será la distancia desde la sombra de la copa en el suelo hasta la copa del árbol?

Solución:

Si se supone que el árbol es totalmente vertical, entonces forma con el suelo un ángulo de 90°. Luego, la distancia entre la copa del árbol y su sombra en el suelo sería la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$x^2 = (16\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2$

$x^2 = 256\text{ m}^2 + 144\text{ m}^2$

$x^2 = 400\text{ m}^2$

$x = \sqrt{400\text{ m}^2} \Rightarrow x = 20\text{ m}$

Entonces, la distancia buscada es 20 m.

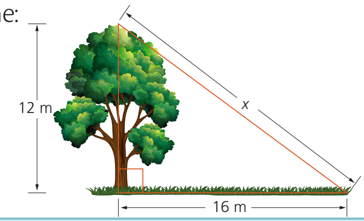


Figura 6

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen las siguientes medidas.

a. 5 dm y 4 dm b. 8 cm y 6 cm

Razonamiento

3 Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene cada una de las siguientes medidas en centímetros.

a. 4 b. 7 c. 13

4 Halla la medida del lado de un cuadrado cuya diagonal es de 14 cm.

5 Calcula la longitud del lado desconocido.

a.

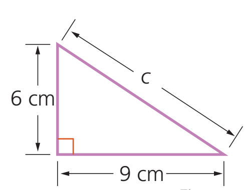


Figura 7

b.

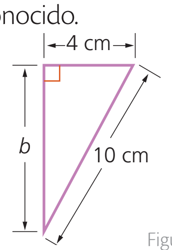


Figura 8

6 Calcula el radio de una circunferencia en la que esta inscrito un cuadrado cuyo lado mide lo siguiente en decímetros.

a. 3 b. 9 c. 4

7 Los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ y $\triangle ODE$ son todos isósceles y rectángulos.

Calcula la longitud de la hipotenusa $\overline{OE}$.

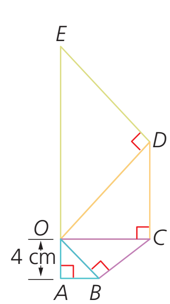


Figura 9

Resolución de problemas

8 Halla la medida x en la Figura 10.

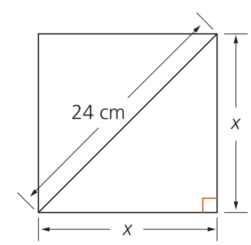


Figura 10

9 Una persona está situada a 15 m de la base de un edificio. La distancia que hay de la persona al piso más alto es 25 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

10 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y un cateto mide 12 cm. Halla el valor del otro cateto.

11 Para una actividad escolar, a Fernanda le encargaron confeccionar doce banderas de Jamaica con las dimensiones que se muestran en la Figura 11.

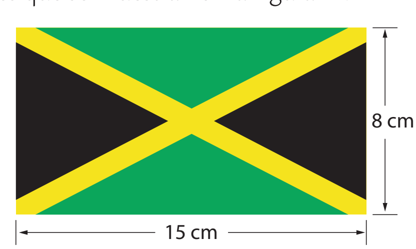


Figura 11

a. ¿Cuál es el área de la bandera?

b. ¿Aproximadamente, cuántos centímetros de cinta amarilla requiere comprar Fernanda para confeccionar las banderas?

11 Área de polígonos regulares

Explora

Nicolás necesita calcular el área del vitral de la Figura 1 para saber si el espacio de 400 cm² en el que quiere ubicarlo es suficiente.

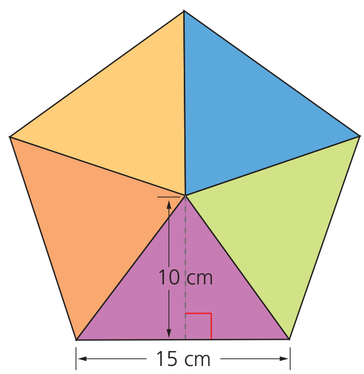


Figura 1

- ¿Podrá Nicolás acomodar el vitral en el espacio que quiere, si este tiene forma de pentágono regular?

El vitral está formado por cinco triángulos congruentes; entonces, para hallar el área del vitral se determina el área de uno de los triángulos y se multiplica por 5.

Área de un triángulo: $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2} = \frac{150 \text{ cm}^2}{2} = 75 \text{ cm}^2$

Área del vitral: $75 \text{ cm}^2 \cdot 5 = 375 \text{ cm}^2$

Como el área del vitral es menor que 400 cm², que es la superficie disponible para ubicarlo, Nicolás puede disponerlo allí.

Para calcular el **área de un polígono regular** de n lados, se descompone en n triángulos isósceles congruentes y luego se adicionan sus áreas.

Los elementos de esos triángulos isósceles coinciden con algunos de los del hexágono (Figura 2).

- La base con el lado del polígono.
- Los lados congruentes con el radio.
- La altura con la apotema.

Si se recortan los triángulos que componen el hexágono y se colocan uno a continuación del otro, se forma un paralelogramo. Observa la Figura 3.

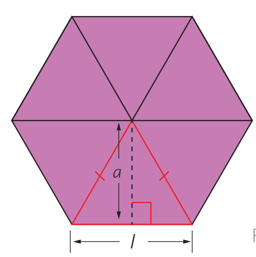


Figura 2

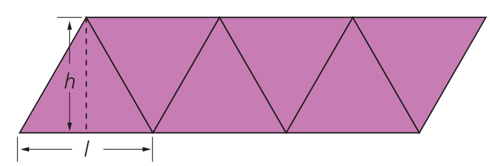


Figura 3

El área del paralelogramo coincide con el área del hexágono.

Como la base del paralelogramo es $3l$, este valor coincide con la mitad del perímetro del polígono, es decir, $\frac{p}{2}$; y la altura h coincide con la apotema a. Entonces:

El **área de un polígono regular** es igual a la mitad del producto del perímetro y de la apotema, expresados en la misma unidad de medida.

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el área de la región sombreada en la Figura 4.

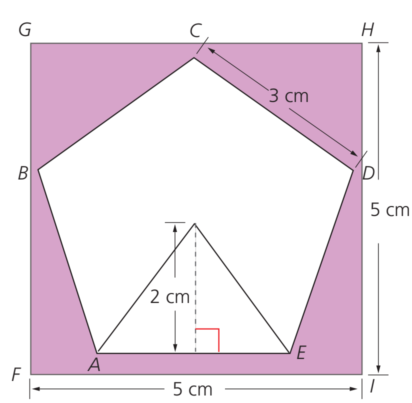


Figura 4

Solución:

Para hallar el área de la región sombreada, es preciso restar el área del pentágono regular $ABCDE$ del área del cuadrado $HGFI$.

Área del cuadrado: $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$

Área del pentágono: $\frac{(5 \cdot 3 \text{ cm}) \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2$

$A = 25 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área de la región sombreada es de 10 cm².

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el área de los polígonos regulares de las figuras 5 a la 10.

a.

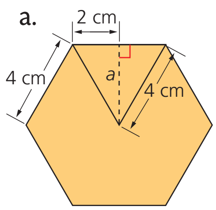


Figura 5

b.

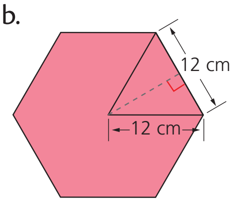


Figura 6

c.

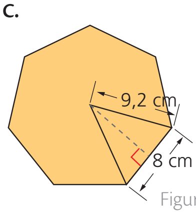


Figura 7

d.

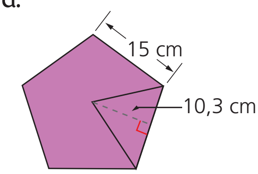


Figura 8

e.

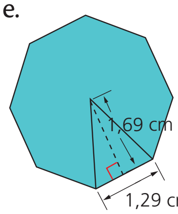


Figura 9

f.

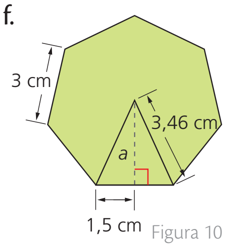


Figura 10

3 Calcula el área de la región sombreada en la Figura 11. Ten en cuenta que los tres hexágonos son regulares y congruentes.

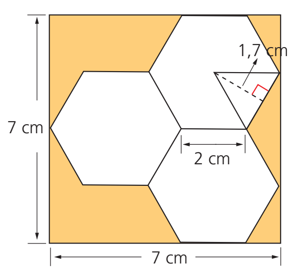


Figura 11

Resolución de problemas

4 Elvira quiere comprar un terreno en una urbanización. Tiene la posibilidad de elegir una de las cuatro que aparecen en la Figura 12. Si todas las figuras son regulares, ¿cuál escogerá si quiere la de mayor superficie?

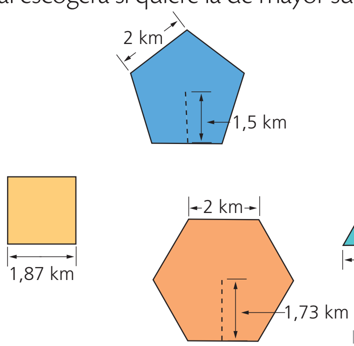


Figura 12

5 Una baldosa en forma hexagonal mide 12 cm de lado (Figura 13).



Figura 13

a. ¿Qué tipo de triángulos se obtienen al descomponer la baldosa?

b. ¿Cómo se calcula la altura de alguno de los triángulos?

c. ¿Cuál es el área de la baldosa?

6 Calcula la superficie que ocupa cada color en el vitral de la Figura 14. Luego, responde.

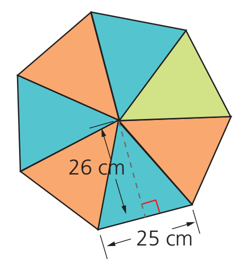


Figura 14

a. ¿Qué porcentaje del vitral está coloreado de azul?

b. ¿Qué fracción del vitral es verde?

c. ¿Cuál mide el área de la región anaranjada?

7 Se quiere colocar grama sintética en la zona verde para los niños de preescolar de una Unidad Educativa del Milenio. Si la zona verde tiene forma de hexágono regular de lado 16 m, ¿cuál es el área que se requiere cubrir con la grama sintética?

8 Determina el área real de una casa, si en el plano de la Figura 15, cada centímetro corresponde a 1,5 m.

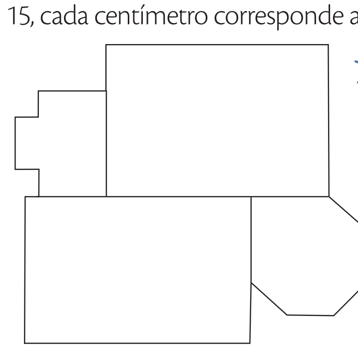


Figura 15

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

Practica Más

Figuras congruentes y figuras semejantes. Razón de semejanza

Modelación

1. Construye en tu cuaderno un polígono congruente y un polígono semejante a cada polígono de las figuras 1 a 4.

a.

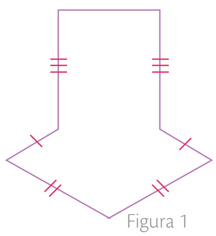


Figura 1

b.

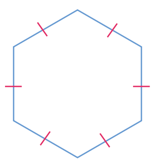


Figura 2

c.

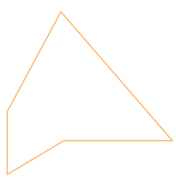


Figura 3

d.

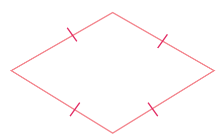


Figura 4

Razonamiento

2. Observa los cuadriláteros semejantes *ADCB* y *EFGB* de la Figura 5 y resuelve.

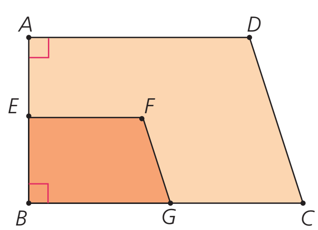


Figura 5

a. Calcula la medida de $\overline{FG}$ si $AD = 12$, $EF = 4$ y $DC = 10$.

b. Halla la medida de los ángulos de cada cuadrilátero si $m\measuredangle EFG = 109°$.

Resolución de problemas

3. Soluciona cada una de las situaciones.

a. Andrea afirma que todos los triángulos equiláteros son semejantes. ¿Es cierta su afirmación?

b. La razón de semejanza de dos cuadrados es $\frac{3}{4}$, y el área del cuadrado más pequeño es 36 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado más grande?

c. Carlos redujo a la mitad la medida del largo y del ancho de una figura rectangular. ¿En cuánto se redujo el área?

Perímetro de figuras

Ejercitación

4. Halla el perímetro de las figuras 6 y 7. Escribe cada respuesta en metros y en centímetros.

a.

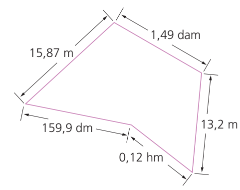


Figura 6

b.

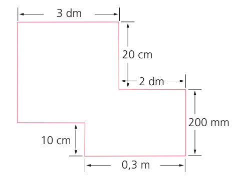


Figura 7

5. Determina las medidas de los lados de los cuadriláteros según las condiciones dadas.

a. Trapecio isósceles de perímetro 216 m.

b. Cuadrado cuyo perímetro es 16,8 dm.

c. Rectángulo de 1,2 dam de largo y perímetro de 45,5 m.

d. Romboide de perímetro de 230 dm y dos de sus lados de medida 8,4 cm.

Unidades de superficie y área de figuras

Ejercitación

6. Completa la Tabla1.

km^2	hm^2	m^2	dm^2	cm^2
0,00146			1 460	

Tabla 1

7. Calcula el área de las figuras 8 a la 11.

a.

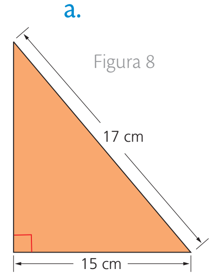


Figura 8

b.

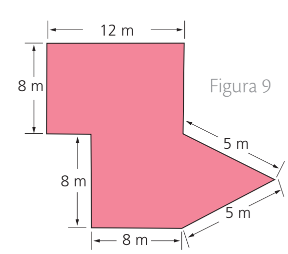


Figura 9

c.

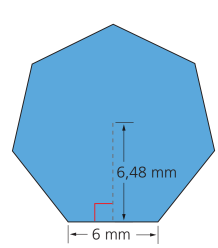


Figura 10

d.

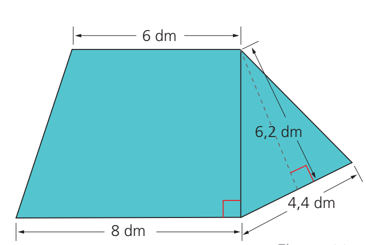


Figura 11

Estrategia: Unificar unidades de medida

Problema

Un centro comercial ha dispuesto un espacio rectangular de 72 m^2 para poner un salón de juegos. Si se quiere cubrir el piso con baldosas cuadradas de 50 cm de lado, ¿cuántas baldosas se requieren?

1. Comprende el problema

- ¿En qué unidades están expresadas las dimensiones de las superficies?

  R: El área del salón está expresada en m^2 y el lado de cada baldosa está expresado en cm.

- ¿Qué se pide encontrar?

  R: El número de baldosas necesarias para cubrir el piso del salón de juegos.

2. Crea un plan

- Halla el área de cada baldosa; luego, expresa esta medida y el área del salón de juegos en la misma unidad de medida. Finalmente, realiza las operaciones necesarias para resolver el problema.

3. Ejecuta el plan

- Calcula el área de una baldosa.

$$50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2\,500 \text{ cm}^2$$

- Expresa el área del salón en cm^2.

$$72 \text{ m}^2 = 72 \cdot 100 \cdot 100 = 720\,000 \text{ cm}^2$$

- Divide el área del salón entre el área de cada baldosa.

$$720\,000 \text{ cm}^2 \div 2\,500 \text{ cm}^2 = 288$$

R: Se necesitan 288 baldosas para embaldosar por completo el piso del salón de juegos.

4. Comprueba la respuesta

- Expresa el área de una baldosa en m^2 y comprueba que se obtiene la misma cantidad de baldosas.

Aplica la estrategia

1. En una bodega rectangular de área 120 m^2 se almacenan 25 mesas de *ping-pong* de las dimensiones que se muestran en la Figura 1.

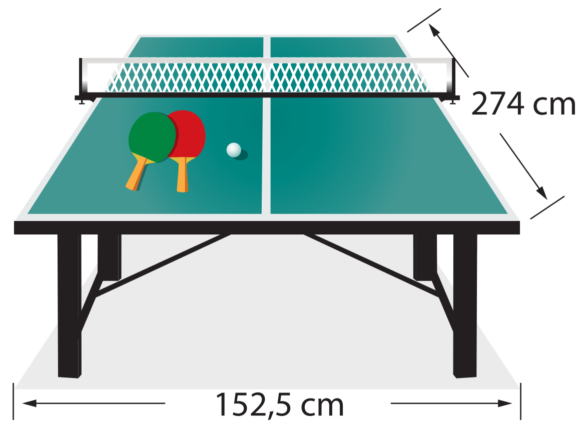


Figura 1

Si las mesas están organizadas una al lado de la otra sin dejar espacio entre ellas, ¿qué área de la bodega está libre de las mesas de *ping-pong*?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Las mesas de un restaurante tienen forma de hexágono regular de 80 cm de lado. ¿Cuántos m^2 de tela se requieren para confeccionar cinco manteles semejantes a la forma de las mesas cuyo lado mida 40 cm más?

Formula problemas

3. Se denominan **ternas pitagóricas** a aquellos tríos de números enteros positivos que cumplen el teorema de Pitágoras. Inventa y resuelve un problema que involucre la terna (8, 15, 17).

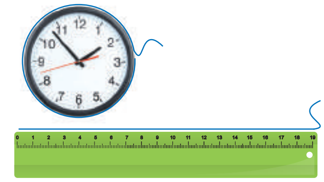
12 Longitudes y áreas de figuras circulares

Explora

Para la tarea de matemáticas, Juana debe hallar el perímetro de un objeto con forma circular.

- Si Juana escogió el reloj de pared de su casa, ¿qué podría hacer para tomar esa medida?

Como el perímetro del reloj es equivalente a la medida de su contorno, Juana puede envolverlo con una cuerda, luego quitarla y medir la longitud de la cuerda desde su extremo hasta donde la estaba sujetando.



Una **circunferencia** está formada por los puntos que están a igual distancia de un punto llamado **centro**. El **círculo** o **región circular** es la unión de la circunferencia y su interior.

12.1 Longitud de la circunferencia

La **longitud de una circunferencia** se obtiene al multiplicar la longitud del diámetro (d) por el valor constante π (aproximadamente 3,14).

$$L = \pi \cdot d$$

Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio (r), se tiene que:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ejemplo 1

Para calcular la medida del radio de una circunferencia cuya longitud es de 9,2 cm, se despeja r en la fórmula de la longitud de la circunferencia, se reemplazan los datos conocidos y se realizan las operaciones necesarias.

Así, como $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, entonces:

$$r = \frac{L}{2 \cdot \pi} = \frac{9{,}2 \text{ cm}}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}46 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la medida del radio de la circunferencia aproximado hasta las centésimas es 1,46 cm.

Ten en cuenta

El número π (pi) se define como la razón entre la longitud de una circunferencia (L) y su diámetro (d) (Figura 1). El número π no es racional; sin embargo, puede aproximarse con números racionales. De aquí en adelante al operar con este número se tomará como referencia $\pi = 3{,}14$.

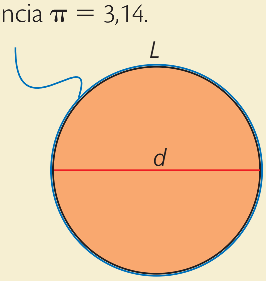


Figura 1

Ejemplo 2

El diámetro de la rueda de un camión mide 90 cm. Para saber qué distancia ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas, se halla primero lo que logra avanzar en una sola vuelta y luego se multiplica el valor obtenido por 100.



La rueda avanza en una vuelta:

$$L = 3{,}14 \cdot 90 \text{ cm} = 282{,}6 \text{ cm}$$

Entonces, cuando la rueda ha dado 100 vueltas, el camión habrá recorrido:

$282{,}6 \text{ cm} \cdot 100 = 28\,260 \text{ cm} = 282{,}6 \text{ m}$

Ejemplo 3

El diámetro (d) ecuatorial de la Tierra es de 12 742 km. Para hallar la longitud de la circunferencia en el paralelo del ecuador, se debe tener en cuenta que $d = 2 \cdot r$; así que, $r = 6371$ km.

$$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6371 \text{ km} = 40\,009{,}88 \text{ km}$$

Esta es la distancia que caminaríamos alrededor de la línea del ecuador.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular longitudes de figuras circulares en la resolución de problemas.

12.2 Longitud de un arco de circunferencia

La **longitud** a **de un arco de circunferencia**, cuyo ángulo central α mide n°, se calcula con la fórmula:

$$a = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot r \cdot n^\circ}{180^\circ}$$

Esta proporción puede usarse también para:	
Hallar la medida del ángulo, dadas las medidas del arco y el radio. $n^\circ = \frac{180^\circ \cdot a}{\pi \cdot r}$	Hallar la medida del radio, dados los valores del ángulo y del arco. $r = \frac{180^\circ \cdot a}{n^\circ \cdot \pi}$

Ten en cuenta

Un **arco de circunferencia** es la parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos. En la Figura 2, se observa el arco a de la circunferencia de radio r y ángulo central α.

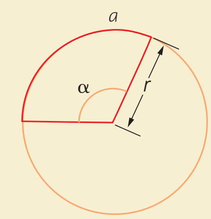


Figura 2

Ejemplo 4

La longitud máxima del arco que genera una cámara de seguridad que tiene un giro límite de 180º y un campo visual de 100 m, se calcula así:



$$a = \frac{\pi \cdot 100 \text{ m} \cdot 180^\circ}{180^\circ} = 3{,}14 \cdot 100 \text{ m} = 314 \text{ m}$$

Ejemplo 5

En una circunferencia, si $a = 2{,}5$ cm y $r = 3{,}18$ cm, se tiene que:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot 2{,}5 \text{ cm}}{\pi \cdot 3{,}18 \text{ cm}} = 45^\circ$$

Ejemplo 6

Un faro barre con su luz un ángulo de 112º. Si el alcance máximo del faro es de 6,5 km, la longitud máxima del arco correspondiente se calcula así:

$$a = \frac{\pi \cdot 6{,}5 \text{ km} \cdot 112^\circ}{180^\circ} = 12{,}7 \text{ km}$$



Ejemplo 7

El matemático Eratóstenes, nacido en Cirene en el año 284 a. C., fue el primero en medir con bastante precisión la circunferencia de nuestro planeta. Él midió la circunferencia terrestre con una gran exactitud, en una época en la que mucha gente pensaba que el mundo era plano como una mesa.

Eratóstenes usó para ello la distancia que había entre Alejandría y Siena (800 km), y el ángulo de 7,2º que se forma en el centro de la Tierra al prolongar líneas imaginarias desde cada ciudad, tal como se observa en la Figura 3. Con estos datos, determinó el radio aproximado de la Tierra.

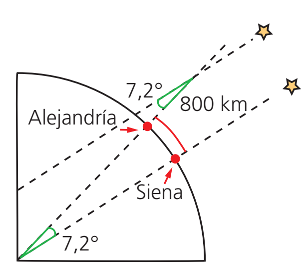


Figura 3

$$r = \frac{180^\circ \cdot a}{n^\circ \cdot \pi} = \frac{180^\circ \cdot 800 \text{ km}}{7{,}2^\circ \cdot \pi} = 6\,369 \text{ km}$$

Compara ese valor con 6 371 km, que es el radio real de la Tierra.

Longitudes y áreas de figuras circulares

12.3 Área de figuras circulares

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Ejemplo 8

Matías está atado a una correa de 4 m de largo, como se observa en la Figura 4. Para determinar el área del espacio por el que se puede desplazar Matías, se debe hallar el área del círculo de radio 4 m, así:

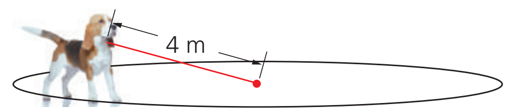


Figura 4

$$A = \pi \cdot (4\ \text{m})^2 = 50{,}24\ \text{m}^2$$

Las figuras circulares más utilizadas son: la corona, el sector y el segmento circular. El área de cada una de estas figuras se halla con las siguientes fórmulas:

- El **área de una corona circular** es igual a la diferencia de las áreas del círculo mayor y del círculo menor.

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

- El **área de un sector circular** cuyo ángulo central mide $n°$, se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n°}{360°}$$

- Un **segmento circular** corresponde a la región limitada por una cuerda y el arco de circunferencia que se determina (Figura 7). Su área se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n°}{360°} - A_{\triangle ABC}$$

Corona circular

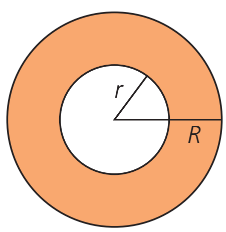


Figura 5

Sector circular

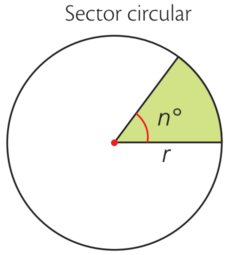


Figura 6

Segmento circular

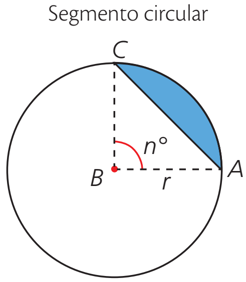


Figura 7

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el área del círculo central y de la región D de la cancha de fútbol de la Figura 8.

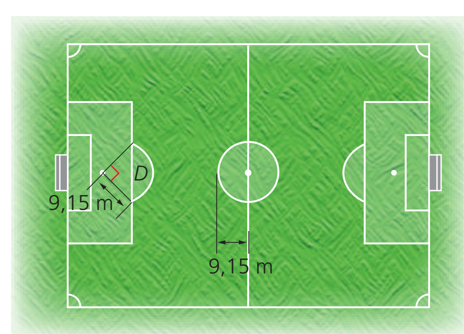


Figura 8

Solución:

El radio del círculo central es 9,15 m; por tanto, su área es:

$$A = \pi \cdot (9{,}15\ \text{m})^2 = 262{,}89\ \text{m}^2.$$

Como la región D es un segmento circular de radio 9,15 cm, su área se halla así:

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot (9{,}15\ \text{m})^2 \cdot 90°}{360°} = 65{,}72\ \text{m}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{9{,}15\ \text{m} \cdot 9{,}15\ \text{m}}{2} = 41{,}86\ \text{m}^2$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 65{,}72\ \text{m}^2 - 41{,}86\ \text{m}^2 = 23{,}86\ \text{m}^2$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular longitudes y áreas de figuras circulares en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la longitud de cada circunferencia y el área del círculo correspondiente de acuerdo con el radio o el diámetro establecido.

a. $d = 56$ cm

b. $r = 0{,}5$ km

c. $r = 125$ m

d. $d = 1\,428$ mm

3 Halla el radio de cada círculo, según su área.

a. $A = 50{,}2656$ cm^2

b. $A = 28{,}2744$ m^2

c. $A = 452{,}16$ mm^2

4 Calcula el área de una corona circular formada por dos circunferencias concéntricas de radios 1,60 cm y 1,20 cm, respectivamente.

5 Determina el área de la Figura 9.

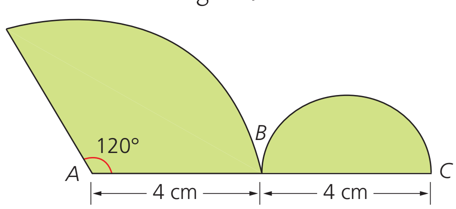


Figura 9

6 Halla el área de la región sombreada en cada caso. Explica tu estrategia.

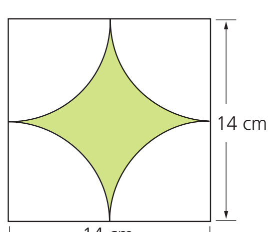


Figura 10

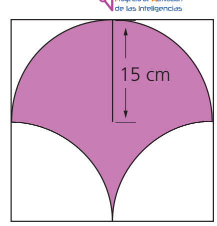


Figura 11

Resolución de problemas

7 De un trozo cuadrado de cartulina, Diana recortó un círculo de 20 cm de diámetro (Figura 12). ¿Qué cantidad de cartulina se desperdició?

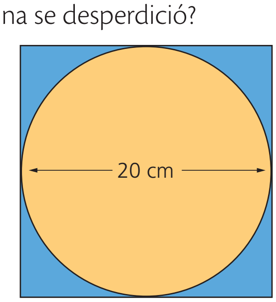


Figura 12

8 Un rectángulo se ubica dentro de un círculo de radio 9 cm, tal como se muestra en la Figura 13. Calcula el área de la región sombreada.

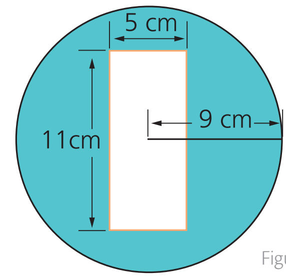


Figura 13

9 La plazoleta de un centro comercial es de forma circular y tiene 500 m de radio. Dentro de ella se instalará un escenario circular cuyo radio es de 25 m. Calcula el área de la plazoleta que no se cubrirá con el escenario.

10 Un artesano ubicó un espejo de forma circular dentro de un marco rectangular de madera (Figura 14). ¿Cuál es el área del marco que soporta el espejo?

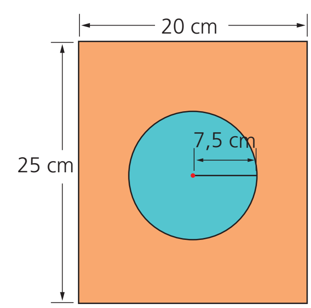


Figura 14

11 Una empresa diseña etiquetas para CD. Sabiendo que el radio del círculo mayor mide 6,2 cm y el del círculo menor, la abertura en el centro, mide 0,6 cm aproximadamente, ¿qué cantidad de papel se utiliza en cada CD?

12 Juan quiere hallar el área del círculo de la Figura 15. Para ello, separa el círculo en 13 regiones, que luego corta con el fin de formar la Figura 16. ¿Qué tipo de figura obtuvo Juan? ¿Cómo se calcula esta área?

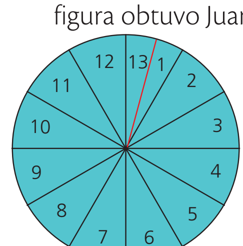


Figura 15

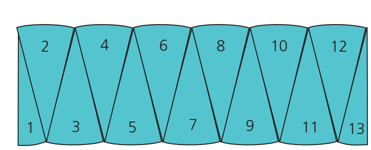


Figura 16

13 Área de prismas y pirámides

Explora

Néstor debe construir el prisma regular de la Figura 1 con un trozo de cartulina de 35 cm de largo por 25 cm de ancho.

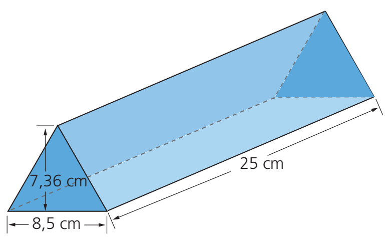


Figura 1

- ¿Le alcanza la cartulina a Néstor para construir el prisma? Justifica tu respuesta.

13.1 Área de prismas regulares

Para establecer si la cartulina le alcanza a Néstor, se halla el área de todas las caras del prisma, es decir, el área total, y se compara con el área de la cartulina.

$$A_{prisma} = 2 \cdot A_{triángulo} + 3 \cdot A_{rectángulo}$$

$$A_{prisma} = 2 \cdot (31{,}28\ cm^2) + 3 \cdot (212{,}5\ cm^2)$$

$$A_{prisma} = 700{,}06\ cm^2$$

$$A_{cartulina} = 35\ cm \cdot 25\ cm = 875\ cm^2$$

Como $875\ cm^2 > 700{,}06\ cm^2$, entonces la cartulina que tiene Néstor es suficiente para construir el prisma.

El **área lateral de un prisma regular** es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por su altura (h), y su **área total** es igual al área lateral más el área de los polígonos de las dos bases.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula el área del prisma pentagonal de la Figura 2.

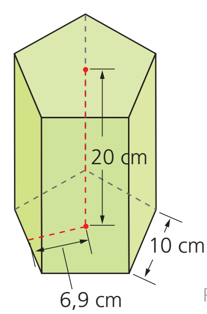


Figura 2

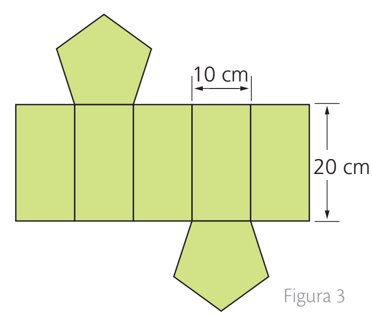


Figura 3

En la Figura 3 se observa que el área lateral del prisma viene dada por el rectángulo del desarrollo:

$A_{lateral}$ = base del rectángulo · altura del rectángulo

$A_{lateral}$ = perímetro del polígono · altura del prisma $= p \cdot h$

$A_{lateral} = 50\ cm \cdot 20\ cm = 1000\ cm^2$

El área de una base del prisma es: $A_{base} = \dfrac{p \cdot a}{2} = \dfrac{50\ cm \cdot 6{,}9\ cm}{2} = 172{,}5\ cm^2$.

Por tanto, el área total es: $A_{total} = 1000 + 2 \cdot 172{,}5 = 1345\ cm^2$.

Ejemplo 2

Para calcular el área lateral y el área total del cubo de la Figura 4, se tiene en cuenta que cada una de sus seis caras es un cuadrado.

$A_{lateral} = p \cdot h$

$A_{lateral} = 24\ cm \cdot 6\ cm = 144\ cm^2$

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$

$A_{total} = 144\ cm^2 + 2 \cdot 36\ cm^2$

$A_{total} = 144\ cm^2 + 72\ cm^2 = 216\ cm^2$

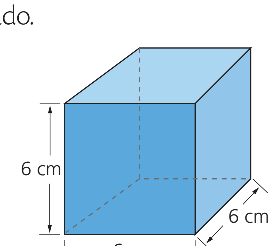


Figura 4

Ten en cuenta

El área de un polígono regular es:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

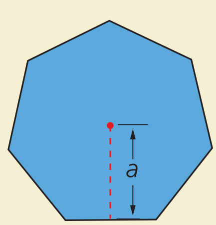


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas.

13.2 Área de pirámides regulares

El **área lateral de una pirámide regular** es igual al semiperímetro del polígono de la base multiplicado por la altura de una cara lateral, y su **área total** es igual al área lateral más el área del polígono de la base.

Ejemplo 3

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total de las pirámides regulares de las figuras 6 y 7.

a.

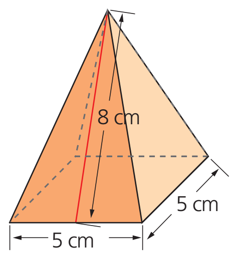


Figura 6

$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}$

$A_{lateral} = 80 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 80 \text{ cm}^2 + (5 \text{ cm})^2$

$A_{total} = 80 \text{ cm}^2 + 25 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2$

b.

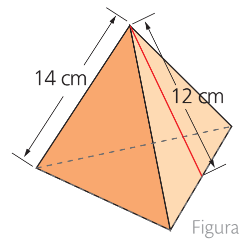


Figura 7

$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot 42 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}$

$A_{lateral} = 252 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 252 \text{ cm}^2 + \frac{14 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2}$

$A_{total} = 252 \text{ cm}^2 + 84 \text{ cm}^2 = 336 \text{ cm}^2$

Ejemplo 4

El área de la pirámide de la Figura 8 se calcula así:

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos, y su base, un polígono regular; en este caso, un hexágono.

En el desarrollo de la pirámide (Figura 9) se puede ver que su área total se obtiene sumando al área lateral, el área de la base.

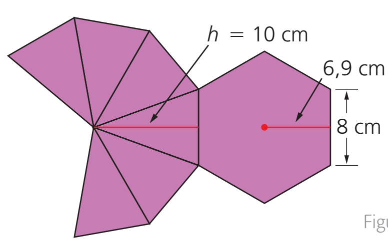


Figura 8

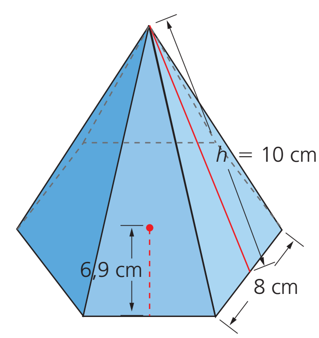


Figura 9

El área lateral es la suma de las áreas de los triángulos de sus caras.

$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{lado del polígono} \cdot \text{apotema de la pirámide} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h$

$A_{lateral} = 6 \cdot A_{triángulo} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot l) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h$

$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot 48 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$

El área de la base es: $A_{base} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{48 \text{ cm} \cdot 6{,}9 \text{ cm}}{2} = 165{,}6 \text{ cm}^2$.

Luego, el área total es: $A_{total} = 240 \text{ cm}^2 + 165{,}6 \text{ cm}^2 = 405{,}6 \text{ cm}^2$.

13 Área de prismas y pirámides

13.3 Área del tronco de una pirámide regular

El **área lateral de un tronco de pirámide** es la suma de las áreas de los trapecios congruentes de sus caras. Así:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot h,$$

donde p_1 y p_2 son los perímetros de las dos bases del tronco. El **área total** se obtiene adicionando al área lateral, el área de las dos bases.

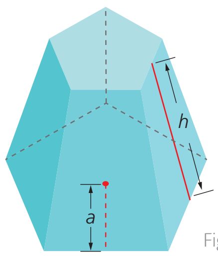


Figura 10

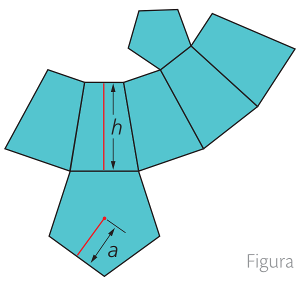


Figura 11

Ten en cuenta

El tronco de una pirámide es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano que corta todas las aristas laterales.

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la Figura 12.

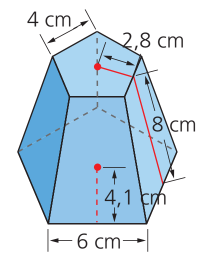


Figura 12

1. Se hallan los perímetros de las dos bases.

$p_1 = 4\text{ cm} \cdot 5 = 20\text{ cm}$ y $p_2 = 6\text{ cm} \cdot 5 = 30\text{ cm}$

2. Se halla el área lateral del tronco de pirámide.

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot h$$

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (20\text{ cm} + 30\text{ cm}) \cdot 8\text{ cm} = 200\text{ cm}^2$$

3. Se calcula el área de cada una de las bases y luego el área total del tronco.

El área de cada una de estas bases es igual al semiperímetro de cada pentágono por la apotema correspondiente.

Área de la base menor: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$

Área de la base mayor: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 30\text{ cm} \cdot 4{,}1\text{ cm} = 61{,}5\text{ cm}^2$

Luego, $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_1 + A_2 = 200\text{ cm}^2 + 28\text{ cm}^2 + 61{,}5\text{ cm}^2 = 289{,}5\text{ cm}^2$

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Calcula el área total del prisma regular hexagonal de la Figura 13.

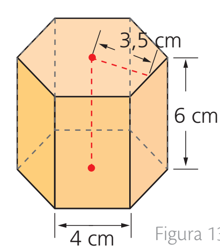


Figura 13

Solución:

El área total de un prisma se puede calcular con la fórmula $p \cdot (h + a)$.

Perímetro de la base: $p = 6 \cdot 4\text{ cm} = 24\text{ cm}$

$A_{\text{total}} = 24 \cdot (6 + 3{,}5) = 228\text{ cm}^2$

2 Calcula el área lateral del tronco de pirámide de bases cuadradas de la Figura 14.

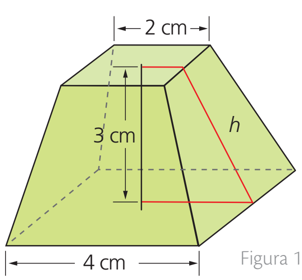


Figura 14

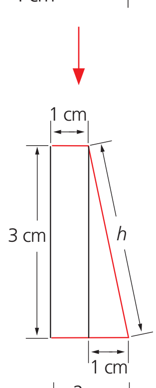


Figura 15

Solución:

Para hallar el área lateral, es necesario calcular el valor de h empleando el teorema de Pitágoras (Figura 15).

$$h^2 = (3\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{10\text{ cm}^2} \Rightarrow h = 3{,}2\text{ cm}$$

Por lo tanto, $A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2} \cdot (8\text{ cm} + 16\text{ cm}) \cdot 3{,}2\text{ cm} = 38{,}4\text{ cm}^2$

Destreza con criterios de desempeño: Construir pirámides y prismas a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de pirámides y prismas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Calcula el área total de cada uno de los prismas representados en las Figuras 16 a 19.

a.

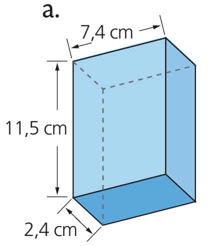


Figura 16

b.

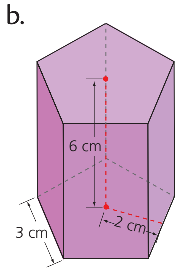


Figura 17

c.

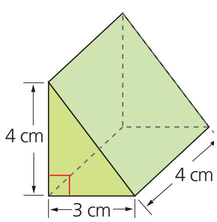


Figura 18

d.

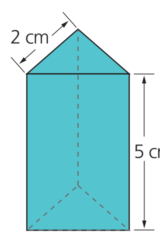


Figura 19

4 Calcula el área total de las siguientes pirámides.

a.

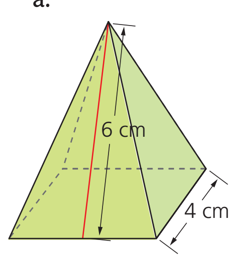


Figura 20

b.

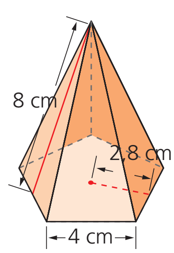


Figura 21

Razonamiento

5 Determina el área total de una pirámide regular, si su apotema mide 1 dm y su base es un cuadrado de 5 cm de lado.

6 Dibuja una pirámide regular cuya base es un octágono de 4 cm de lado, su apotema mide 4,84 cm y su altura es de 1,2 dm. Luego, calcula el área total de la pirámide.

Ejercitación

7 Construye y halla el área total del tronco de pirámide regular representado en la Figura 22.

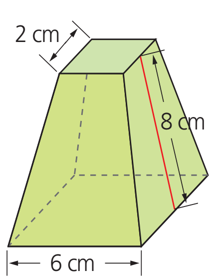


Figura 22

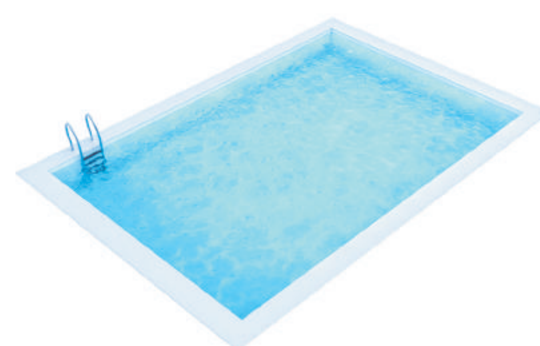
Resolución de problemas

8 Carolina compra una caja de cartón cuya forma es la de un prisma rectangular de 15 cm de largo, 10 cm de ancho y 4 cm de altura. Si ella la desarma y halla su área lateral y su área total, ¿qué valores encuentra?

9 ¿Cuál es el precio del embalaje plástico para una caja de 0,8 m · 0,7 m · 0,6 m, si el valor de cada metro cuadrado de plástico es de $ 1,50?

10 ¿Cuántos m² de madera requiere un carpintero para fabricar tres puertas de 2 m de alto, 80 cm de largo y 5 cm de ancho?

11 Ricardo desea cambiar las baldosas que cubren las paredes y el piso de su piscina, la cual tiene forma de un prisma rectangular de 11 m de largo, 5 m de ancho y 1 m de profundidad. Si cada m² cuesta $ 8,80, ¿cuánto debe invertir Ricardo en la compra de las baldosas?



12 El tejado de una casa tiene forma de pirámide cuadrangular, sin base. Un lado de su base mide 16 m y su altura es de 4 m (Figura 23). Se sabe que el tamaño de cada teja para cubrir el techo es de 2 m² y su precio es de $ 5.

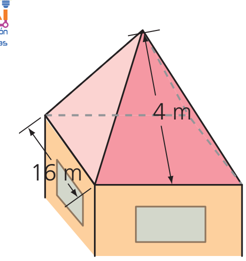


Figura 23

Supón que se compran diez tejas más de las necesarias para reemplazar las que se rompan.

a. ¿Cuántas tejas se necesitan para cubrir el techo?

b. ¿Cuántas tejas se compraron en total?

c. ¿Cuál es el costo total de las tejas que se compraron?

14 Área de cilindros y conos

Explora

Sergio trabaja en una empresa etiquetadora de productos enlatados y se le ha encomendado la tarea de elaborar la etiqueta lateral de un nuevo producto que se empacará en la lata cilíndrica de la Figura 1.



Figura 1

- ¿Cuántos cm^2 de papel empleará Sergio en la elaboración de la etiqueta?

14.1 Área del cilindro

Para resolver el problema, Sergio desarmó el modelo del envase y ubicó sus medidas como se observa en la Figura 2. Esto le permitió saber que debe fabricar una etiqueta rectangular cuya altura mida 7 cm y cuya base sea igual a la longitud de la base del cilindro; es decir, a la longitud de la circunferencia.

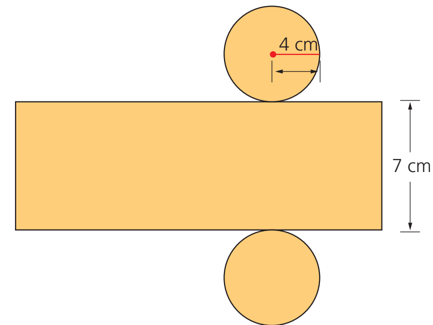


Figura 2

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} = 175{,}93\text{ cm}^2$$

Longitud de la circunferencia; Altura del rectángulo

Por tanto, Sergio empleará 175,84 cm^2 de papel en la elaboración de la etiqueta.

El **área lateral de un cilindro** coincide con el área de un rectángulo. Su **área total** se obtiene al adicionar el área lateral con el área de las dos bases circulares.

Para calcular el área de un cilindro se aplican estas fórmulas:

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2,$$

donde r es el radio del círculo de la base y h es la altura del cilindro.

Ejemplo 1

Si la etiqueta que debe elaborar Sergio para la lata de la Figura 1 debiera cubrir también las tapas del recipiente, sería preciso calcular el área total de la lata, así:

$$A_{base} = \pi \cdot (4\text{ cm})^2 = 50{,}24\text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 175{,}84\text{ cm}^2 + 2 \cdot 50{,}24\text{ cm}^2 = 276{,}32\text{ cm}^2$$

Lo anterior significa que Sergio necesitaría 276,32 cm^2 de papel para elaborar una etiqueta que cubra por completo la lata en la que se empacará el nuevo producto.

Ejemplo 2

Para calcular la cantidad de plástico que se necesita para construir un frasco con tapa de forma cilíndrica de 5 cm de diámetro y 10 cm de altura, se procede así:

1. Se halla el área lateral del frasco.

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 157\text{ cm}^2$$

2. Se calcula el área de una de las bases.

$$A_{base} = \pi \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 = 19{,}625\text{ cm}^2$$

Por tanto, la cantidad de material que se requiere para construir el frasco plástico es:

$$A_{total} = 157\text{ cm}^2 + 2 \cdot 19{,}625\text{ cm}^2 = 196{,}25\text{ cm}^2$$



Destreza con criterios de desempeño: Construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.

14.2 Área del cono

Para calcular el **área del cono** se aplican estas fórmulas:

$$A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2,$$

donde r es el radio del círculo de la base y g es la longitud de la generatriz.

Observa las similitudes y diferencias para hallar el área lateral y el área total entre una pirámide regular y un cono recto.

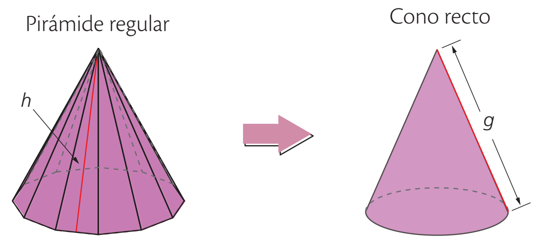


Figura 3

Apotema: h → Generatriz: g

Perímetro: p → Longitud de la circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r$

$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h$ → $A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g = \pi \cdot r \cdot g$

Ten en cuenta

- Un **cilindro recto** es un cuerpo geométrico que se obtiene al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados.
- Un **cono recto** es un cuerpo geométrico que se obtiene al rotar un triángulo rectángulo en torno a un cateto.

Ejemplo 3

En la Figura 4 se observa que $r = 5$ cm y $g = 10$ cm. Por tanto, el área lateral del cono se calcula de la siguiente manera:

$$A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 157 \text{ cm}^2$$

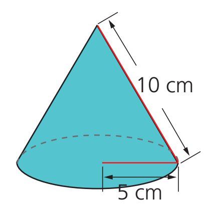


Figura 4

Ejemplo 4

Para determinar el área total de un cono cuya área lateral es 38 cm² y cuyo radio de la base es 3 cm, se procede como se muestra a continuación.

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$

$A_{total} = 38 \text{ cm}^2 + \pi \cdot (3 \text{ cm})^2$

$A_{total} = 38 \text{ cm}^2 + 28{,}26 \text{ cm}^2 = 66{,}26 \text{ cm}^2$

14.3 Área del tronco de cono

Observa en la Figura 5 el desarrollo del tronco de una pirámide y el desarrollo del tronco de un cono.

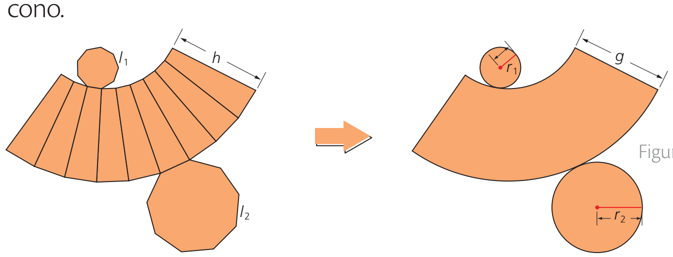


Figura 5

$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot h$ → $A_{lateral} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g$

El área total se obtiene sumando el área lateral con el área de las dos bases.

14 Área de cilindros y conos

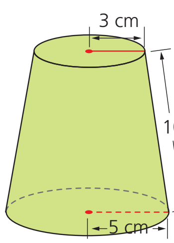


Figura 6

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 La altura de una lata es de 10 cm y el diámetro de su base, 7 cm. Salvo las bases, la lata está recubierta de un papel en el que figuran la marca comercial y otra información general. ¿Qué superficie de papel, en metros cuadrados, se necesitará para recubrir 1 000 latas?

Solución:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 219{,}8 \text{ cm}^2$

Para 1 000 latas: $219{,}8 \cdot 1\,000 = 219\,800 \text{ cm}^2$

Se necesitan aproximadamente 22 m^2 de papel para cubrir las 1 000 latas.

Ejercitación

2 Calcula el área total del tronco de cono representado en la Figura 6.

Solución:

$A_{total} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g + \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2$

$A_{total} = 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) \cdot 10 \text{ cm} + 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm})^2 + 3{,}14 \cdot (3 \text{ cm})^2$

$A_{total} = 251{,}2 \text{ cm}^2 + 78{,}5 \text{ cm}^2 + 28{,}26 \text{ cm}^2 = 357{,}96 \text{ cm}^2$

MatemaTICS

Halla el área total de un tronco de cono con la calculadora científica

En tu calculadora puedes obtener el área de un cilindro, de un cono o de un tronco de cono de manera más aproximada, ya que se tienen en cuenta más cifras decimales del número π. En la mayoría de las calculadoras se utiliza la tecla SHIFT combinada con una tecla en la que se identifica el número π; para esta calculadora es la tecla EXP.

- Observa el procedimiento para calcular el área total de un tronco de cono empleando la fórmula correspondiente, si se sabe que el radio de la base superior es 4 cm, la generatriz es 12 cm y el radio de la base inferior es 6 cm.

Para hallar el área lateral del tronco de cono empleando la fórmula $\pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g$ en la calculadora, se digita la secuencia:

SHIFT EXP X (4 +
6) X 1 2 EXE

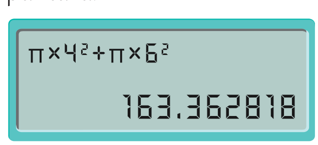
La calculadora registra:



Para hallar el área de las bases del tronco de cono empleando la fórmula $\pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2$, se digita:

SHIFT EXP X 4 x^2 +
SHIFT EXP 6 x^2 EXE

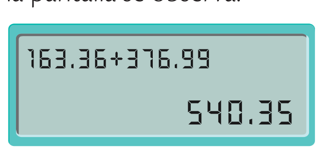
En pantalla:



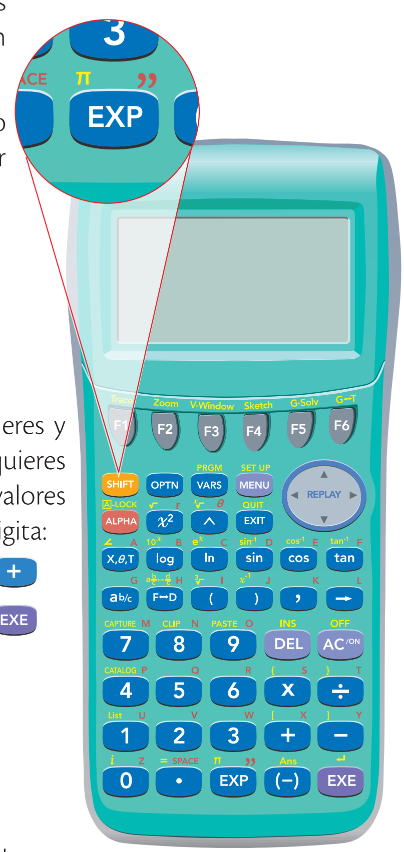
Elige la aproximación que requieres y suma los valores anteriores. Si quieres sumar en la calculadora los valores aproximados a las centésimas, digita:

1 6 3 • 3 6 +
3 7 6 • 9 9 EXE

En la pantalla se observa:



Por consiguiente, el área total del tronco de cono es 540,35 cm^2.



Destreza con criterios de desempeño: Construir conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes) para calcular el área lateral y total de conos y cilindros.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Dibuja un cilindro de 4 cm de diámetro y 6 cm de altura. Luego, calcula su área total.

4 Calcula el área de los cilindros cuyas dimensiones son:

a. Radio: 2,5 cm; altura: 1,2 dm

b. Diámetro: 4,8 cm; altura: 0,8 dm

5 Halla las áreas que se indican.

a. Área total de un cilindro recto de 8 cm de altura y con un diámetro de la base de 5 cm.

b. Área total de un cono recto de 2 dm de altura y con un diámetro de la base de 1 dm.

Razonamiento

6 Lee y responde.

Al girar el rectángulo de la Figura 7 alrededor del lado $\overline{AB}$ se obtiene un cilindro. Si se gira alrededor del lado $\overline{AD}$ se obtiene otro cilindro. ¿Tienen la misma área?

Compruébalo calculando ambas áreas.

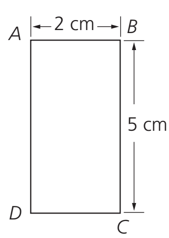


Figura 7

Ejercitación

7 Calcula el área total de los conos cuyas dimensiones se presentan a continuación.

a. Radio: 2,5 cm; generatriz: 1,2 dm

b. Diámetro: 24 cm; altura 1,6 dm

8 Construye y determina el área total del tronco de cono representado en la Figura 8.

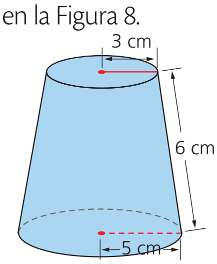


Figura 8

Resolución de problemas

9 Los radios de las bases de un tronco de cono miden 5 cm y 2 cm, respectivamente, y su altura mide 4 cm. Calcula el área total del tronco de cono.

10 Un envase tiene forma de cilindro circular recto. El área de cada base es de 1225 cm^2 y su altura es de 12 cm.

a. ¿Cuánto mide el diámetro de la base?

b. ¿Cuál es el área lateral del recipiente?

c. ¿Cuánto mide su área total?

11 Una empresa de atún empaca doce latas por caja. Las dimensiones de cada lata y la disposición en la que se vende el producto a los supermercados se muestra en la Figura 9.

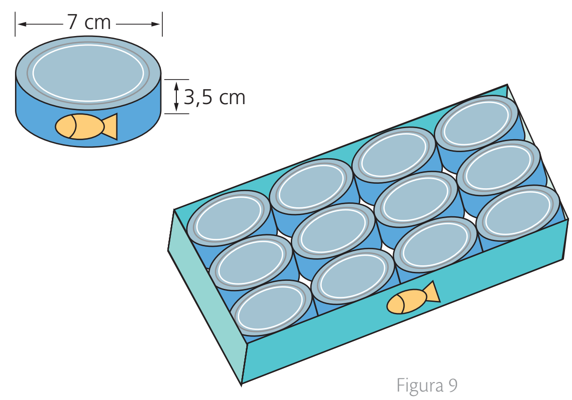


Figura 9

a. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

b. Si se quiere etiquetar la superficie lateral de las latas de atún, ¿cuánto papel se necesita para tres cajas del producto?

12 El radio de un cono mide 2,5 cm y la generatriz, 7 cm. Calcula su área total.

13 El diámetro de un cono mide 12 cm y su altura es de 8 cm. Calcula su área total.

14 La galleta de un cono de helado se cubre con una servilleta como la de la Figura 10. Si el área de la servilleta es 110 cm^2, ¿cuánto mide el radio?

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

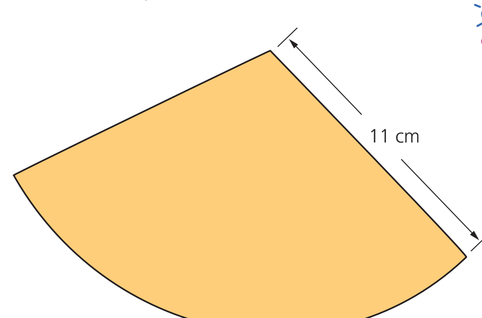


Figura 10

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Las medidas del carné del colegio de Isabel son 15 cm de ancho por 10 cm de alto. Si Isabel saca una ampliación al 200%, ¿cuáles son las dimensiones del carné ampliado?

A. 30 cm de ancho por 20 cm de alto

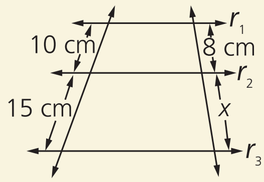
B. 40 cm de ancho por 15 cm de alto

C. 50 cm de ancho por 30 cm de alto

D. 20 cm de ancho por 50 cm de alto

2. Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud del segmento que falta en cada caso.

$\overleftrightarrow{r_1} \parallel \overleftrightarrow{r_2} \parallel \overleftrightarrow{r_3}$



A. 10 cm

B. 12 cm

C. 14 cm

D. 15 cm

3. Si la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es $\frac{121}{81}$, entonces la razón de semejanza es:

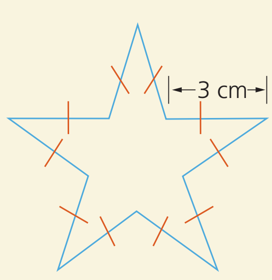
A. $\frac{9}{10}$

B. $\frac{11}{9}$

C. $\frac{10}{9}$

D. $\frac{9}{11}$

4. El perímetro (en metros) de la siguiente figura es:



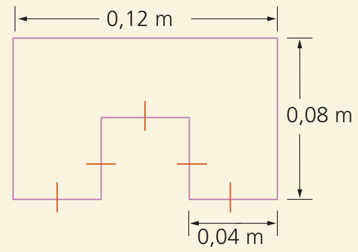
A. 0,2 m

B. 0,6 m

C. 0,3 m

D. 0,4 m

5. El perímetro (en metros) de la siguiente figura es:



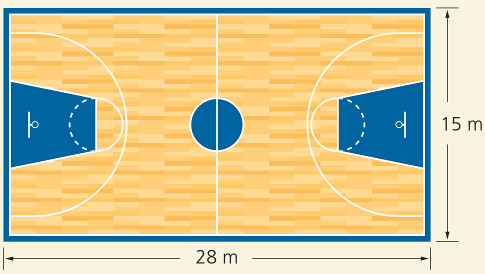
A. 0,48 m

B. 0,44 m

C. 0,52 m

D. 0,40 m

6. Observa las dimensiones de la cancha de baloncesto de un colegio, ¿cuál es su perímetro?



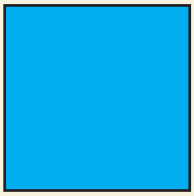
A. 96 m

B. 79 m

C. 83m

D. 86 m

7. El número de líneas de simetría que tiene un cuadrado es:



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. ¿Cuánto mide el lado de un hexágono semejante a uno de lado 2 cm si se sabe que la razón de semejanza es 3,5 cm?

A. 5 cm

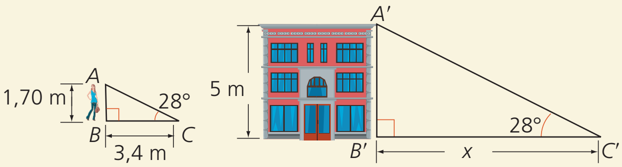
B. 7 cm

C. 9 cm

D. 11 cm

Indicadores de logro:
- Aplica las fórmulas del área de polígonos en la resolución de ejercicios.
- Calcula el perímetro de distintas figuras geométricas.
- Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.
- Aplica el teorema de Tales en la resolución de problemas.
- Reconoce líneas de simetría en figuras geométricas.

9. En la Figura se observa que, a cierta hora del día, una persona de 1,70 m de estatura proyecta una sombra de 3,4 m. ¿Cuánto mide la sombra que proyecta a la misma hora un edificio de 5 m de altura?



A. el edificio proyecta una sombra de 12 m

B. el edificio proyecta una sombra de 10 m

C. el edificio proyecta una sombra de 13 m

D. el edificio proyecta una sombra de 11 m

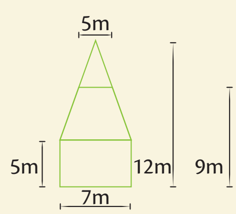
10. El área total de la figura es:

A. 66,5 m^2

B. 68,5 m^2

C. 70,5 m^2

D. 72,5 m^2



11. Se coloca una escalera de 5 m separada 1 m de la base de un muro. La altura que alcanza la escalera es:

A. 5,1 m **B.** 4,9 m

C. 3,6 m **D.** 2,4 m

12. Desde un aeroplano se observa una cabaña, si el aeroplano vuela a una altura de 2 000 m y la sombra que proyecta sobre el suelo se encuentra a 800 m de la cabaña. La distancia entre el aeroplano y la cabaña es de:

A. 1 833, 03 m **B.** 2 154,07 m

C. 3 464,10 m **D.** 5 291,50 m

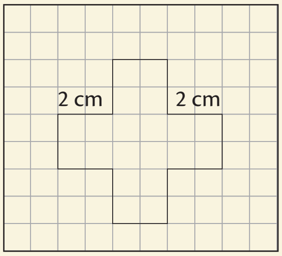
13. El área de la figura es:

A. 64 cm^2

B. 56 cm^2

C. 48 cm^2

D. 36 cm^2



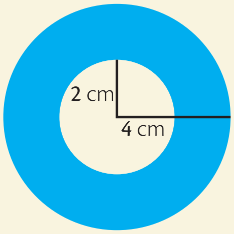
14. El área sombreada (en cm^2) es:

A. 6π

B. 8π

C. 10π

D. 12π



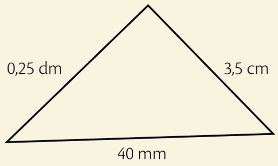
15. El perímetro de la figura es:

A. 10 dm

B. 10 mm

C. 10 cm

D. 1 cm



16. El radio del cono que se observa en la figura es:

A. 6,0 cm

B. 6,5 cm

C. 7,0 cm

D. 7,5 cm

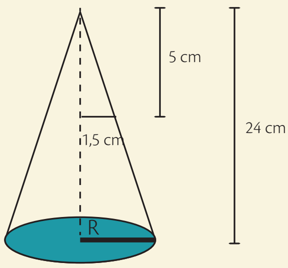


Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

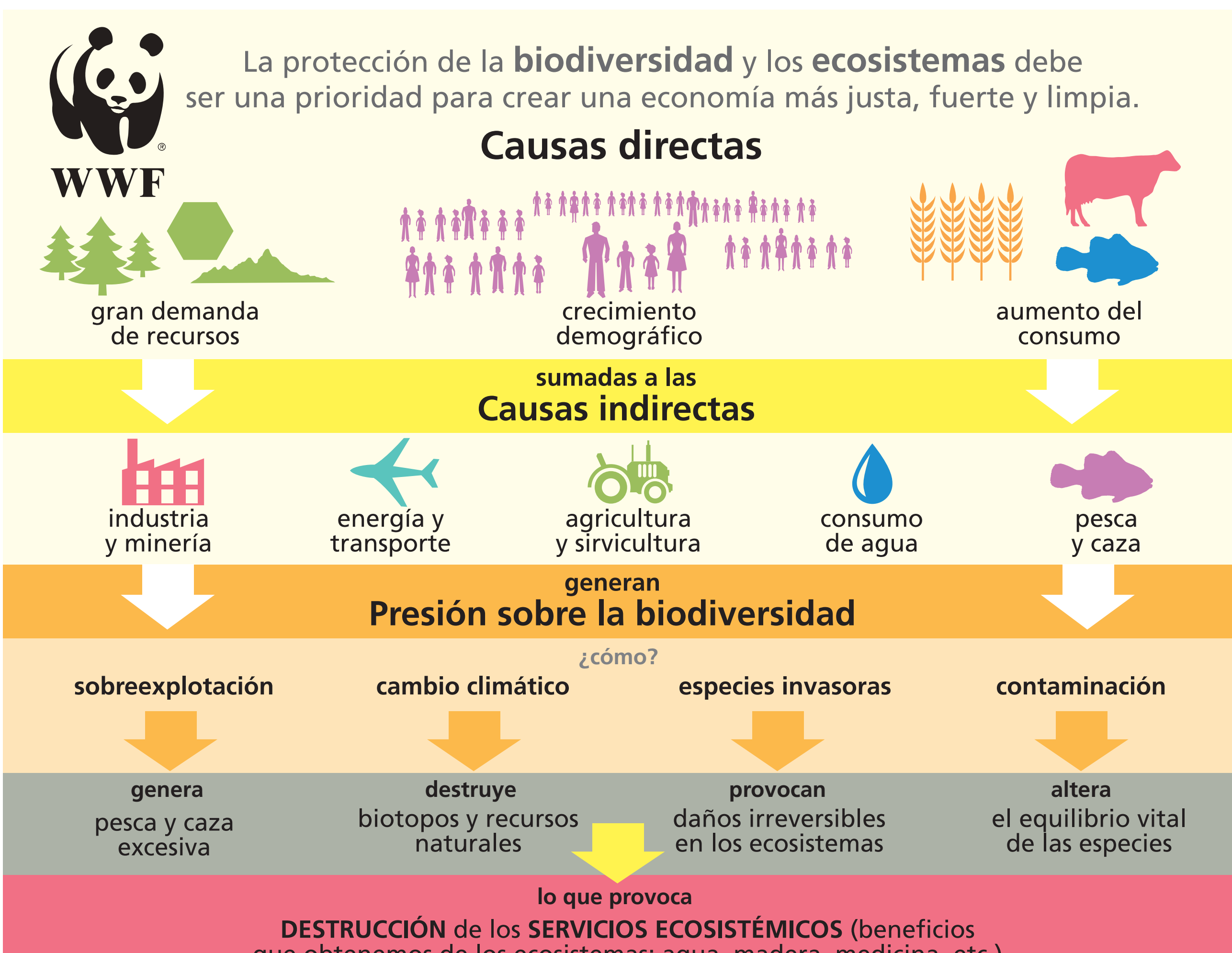
Conoce los efectos de la transformación de los ecosistemas

La biodiversidad hace referencia a la amplia variedad de especies de plantas, animales, microorganismos, etc. que habitan sobre la Tierra y a los ecosistemas en donde las especies interactúan entre ellas y con el medio. La biodiversidad y los ecosistemas son de gran importancia para el bienestar de la humanidad. Sin embargo, se están perdiendo por diversas causas y los humanos somos directamente responsables de algunas de estas.



Pérdida y fragmentación de ecosistemas

Los ecosistemas han sufrido alteraciones que los han transformado, afectando sus componentes y su capacidad de sobrevivir. A continuación encontrarás las principales causas de la destrucción de los ecosistemas y sus consecuencias futuras.



Adaptado de http://www.concienciaeco.com/2010/10/14/wwf-informe-planeta-vivo-2010/

Evita la pérdida de los ecosistemas

Todos los seres humanos somos responsables de la crisis que atraviesa la biodiversidad mundial, que se debe principalmente a nuestros hábitos de consumo cotidianos. En cada una de las siguientes situaciones plantea una acción que puedas realizar para mitigar la transformación ecosistémica.

Muerte de corales por desechos



Aumento de la tala de bosques



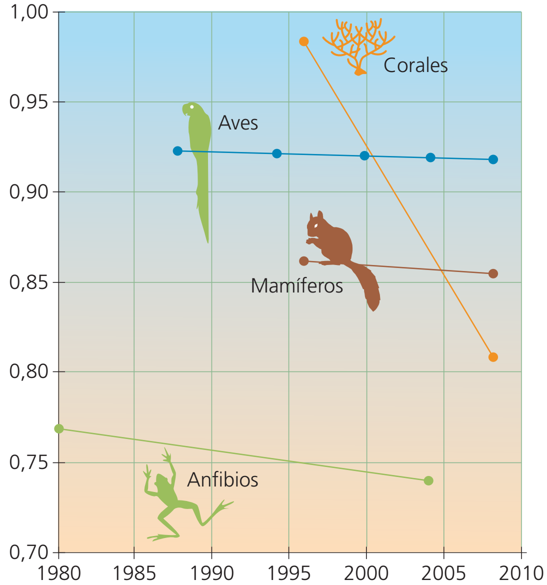
Sobreexplotación del suelo



Conexión con las matemáticas

La Estadística es indispensable para el estudio y análisis de los cambios en los ecosistemas, ya que a través de los gráficos estadísticos y de las tablas de frecuencias es más fácil conocer la situación actual de los ecosistemas y, a partir de ahí, plantear estrategias para su conservación.

1. En el siguiente diagrama, el 1 indica que no se prevé que las especies de un grupo se extingan en un futuro inmediato y el 0 indica que todas las especies de un grupo se han extinguido. Con base en esta información, analiza el gráfico y escribe tres conclusiones relacionadas con la extinción de los anfibios, mamíferos, aves y corales.



Adaptación de: Secretaría del Convenio sobre la Diversidad Biológica, *Perspectiva Mundial sobre la Diversidad Biológica 3*. Montreal, 2010.

2. Consulta datos estadísticos relacionados con alguno de los siguientes temas.

- Porcentaje de especies endémicas en Ecuador.
- Variación de la deforestación a lo largo del tiempo.
- Especies de plantas con mayor peligro de extinción.
- Porcentaje del territorio del planeta ocupado por bosques naturales.
- Ecosistemas que están amenazados.

Trabajo en grupo

3. Construye con tus compañeros tablas de frecuencias y gráficos estadísticos (pictogramas, diagramas de barras o diagramas circulares) para presentar la información recogida, de manera clara y organizada.

4. Escriban conclusiones a partir de sus gráficos estadísticos.

....

....

....

5. Preparaen un cartel en la que inviten a sus compañeros a tomar conciencia sobre la situación actual de los ecosistemas y la biodiversidad y a pensar en alternativas para disminuir nuestro impacto. Apóyense en la información recogida.

Habilidades digitales

Crea tu propio blog

La difusión de información pertinente es posible a través de la creación de tu propio blog con Blogger. Tendrás un espacio virtual donde podrás compartir tus ideas, actividades y puntos de vista relacionados con aspectos personales y académicos. Ahí tendrás la oportunidad de mostrarle al mundo digital lo que sabes y piensas. En esta actividad, aprenderás a crear, editar, publicar y compartir tu propio blog.

1 Abre tu cuenta de Blogger

a. Digita la dirección www.blogger.com.

b. Coloca los datos de tu cuenta de Gmail (si no tienes correo electrónico con Gmail, puedes abrirlo en www.gmail.com).



Indica tu dirección de correo electrónico y coloca tu contraseña.

2 Nombra tu blog

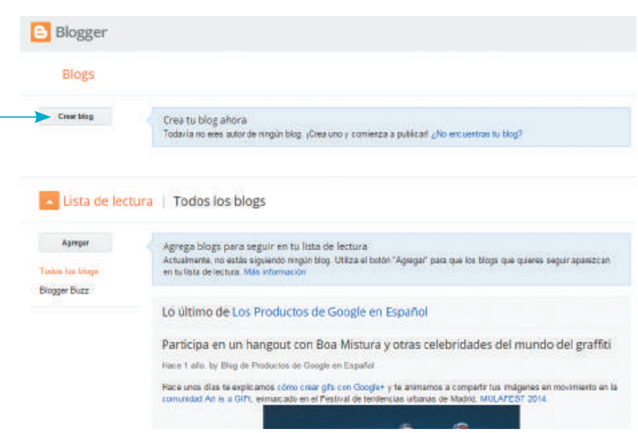
a. Escribe por título, la asignatura correspondiente y tu nombre.

b. Para la dirección de tu blog, escribe tu primer nombre y apellido, seguido por la inicial de la asignatura, sin dejar espacios.

c. Luego, elije una plantilla y crea tu blog.



Aparecerá una pantalla inicial, selecciona la opción *Crear blog.*



3 Edita tu blog

a. Elabora tus primeras entradas.

b. Inserta textos e imágenes y ve cambiando el estilo de tu blog.

c. Emplea la barra de herramientas para personalizar tus entradas.



Inicia la edición de tu blog dando clic sobre el enlace “Empezar a crear entradas”.

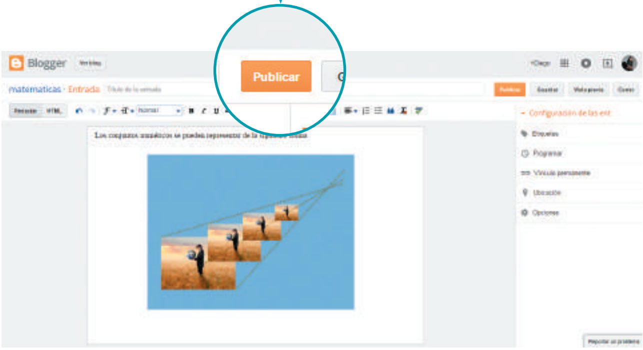


4 Practica lo visto

a. Busca y selecciona imágenes y documentos de fuentes confiables de Internet que permitan explicar y justificar qué es la homotecia. Recuerda que una fuente es confiable si proviene de personas o entidades reconocidas. Esto puede comprobarse al identificar el autor o autores del sitio web, información que puede aparecer en la parte superior o inferior del sitio o en secciones denominadas: "Creado por", "Acerca de", "Hecho por", "Publicado por", etc.

b. En una nueva entrada (o varias si lo requieres), ingresa un texto escrito por ti y las imágenes y documentos de apoyo que seleccionaste. No olvides citar las fuentes de la información.

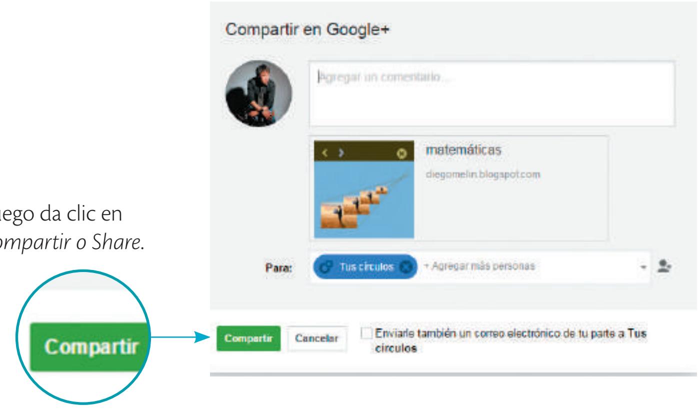
Utiliza las herramientas para guardar tu trabajo, aprovecha la vista previa y luego publícalo.



5 Comparte tu blog

Ingresa los correos electrónicos de tus compañeros y de las personas que quieras que conozcan que tu blog.

Luego da clic en *Compartir o Share.*



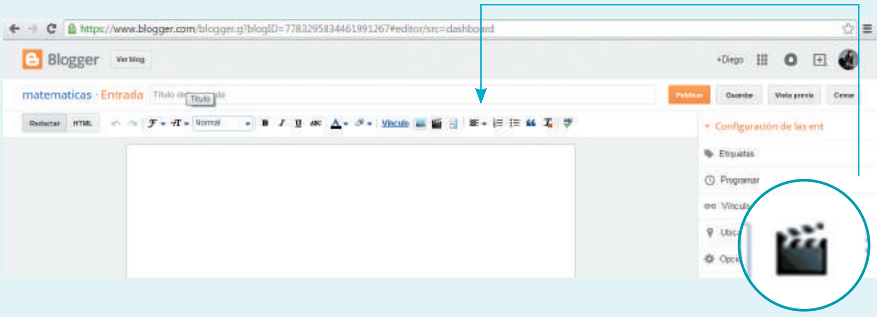
Aprende más

Consulta un poco más sobre la homotecia y sus usos en contextos diferentes a las matemáticas.

a. Busca y selecciona un video interesante sobre el tema.

b. Inserta el video seleccionado, empleando el ícono de video.

c. Repite los pasos 3 y 5.



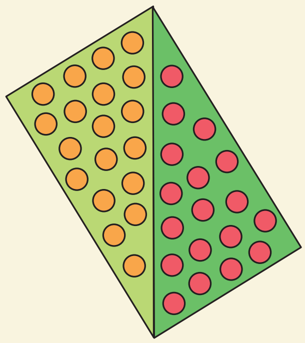
Ícono de video.

Evaluación de la unidad

Figuras congruentes

Resolución de problemas

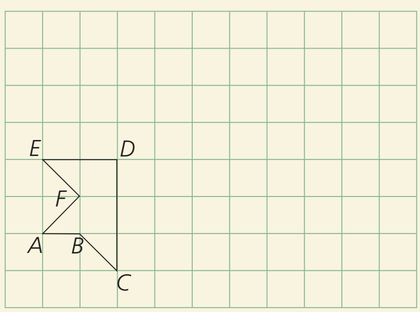
1. Alfredo tiene un terreno en forma de romboide en el que sembrará árboles de naranjas y manzanas. Si divide el terreno por su diagonal, ¿son iguales las áreas de los terrenos obtenidos? Explica tu respuesta.



Figuras semejantes

Modelación

2. Dibuja en la cuadrícula un polígono semejante al polígono *ABCDEF* con razón de semejanza $k = 2$.

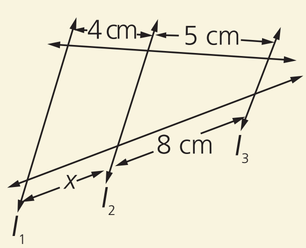


Teorema de Tales

Ejercitación

3. Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud del segmento que falta en cada caso.

a. $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$

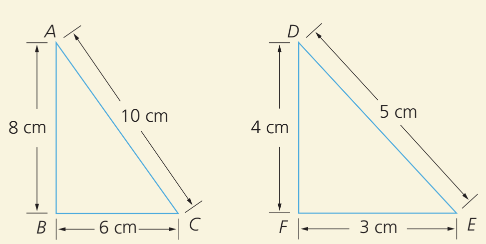


Criterios de semejanza de triángulos

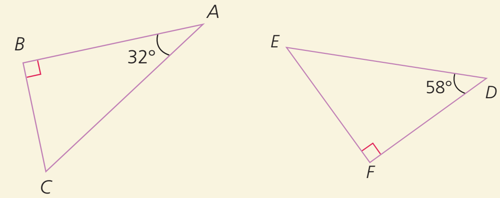
Ejercitación

4. Determina si cada par de triángulos son semejantes o no. Indica el criterio que aplicaste en caso de que lo sean.

a.



b.



Razón de semejanza de figuras y de áreas

Razonamiento

5. Selecciona, en cada caso, la respuesta a cada situación.

a. La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es $\frac{25}{9}$. La razón de semejanza es:

$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{5}{3}$

b. La razón de semejanza de dos triángulos es $\frac{7}{2}$. La razón de las áreas es:

$\frac{7}{4}$ $\frac{49}{4}$ $\frac{14}{4}$

Simetría en figuras geométricas

Ejercitación

6. Traza la línea de simetría en la siguiente figura.



Indicadores de logro:

- Dibuja figuras geométricas semejantes.
- Aplica las fórmulas del área de polígonos en la resolución de ejercicios.
- Calcula el perímetro de distintas figuras geométricas.
- Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.
- Aplica el teorema de Tales en la resolución de problemas.
- Reconoce líneas de simetría en figuras geométricas.

Homotecias

Ejercitación

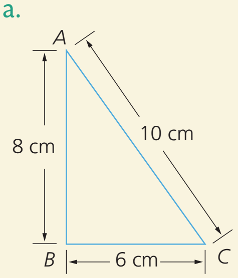
7. Dibuja en tu cuaderno la homotecia del cuadrilátero cuyos vértices son (0, 1), (2, 0), (3, 3) y (0, 3), con factor de proporcionalidad 1,5 y centro en (4, 2).

Perímetro de figuras planas

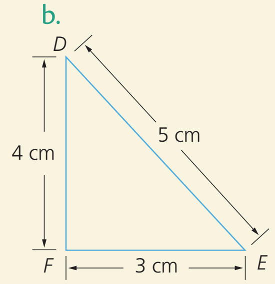
Ejercitación

8. Expresa el perímetro de las siguientes figuras en metros.

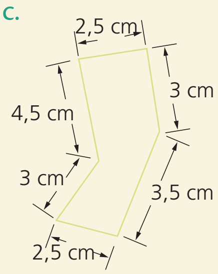
a.



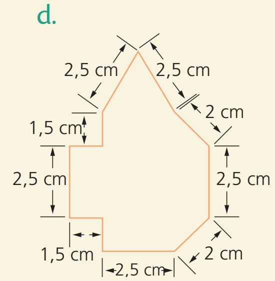
b.



c.



d.



Unidades de superficie

Ejercitación

9. Completa las siguientes igualdades.

a. 180 cm² = ______ m²

b. 32 hm² = ______ dm²

c. 12,4 km² = ______ dam²

d. 78,65 mm² = ______ cm²

e. 3 216 m² = ______ hm²

f. 158,2 dm² = ______ dam²

Teorema de Pitágoras.

Ejercitación

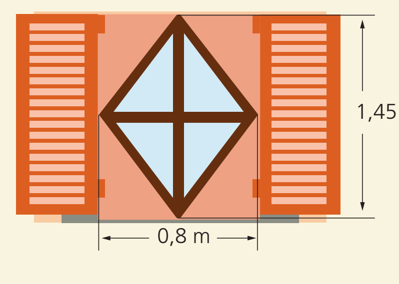
10. Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene ocho centímetros.

Área de figuras planas

Resolución de problemas

11. ¿Cuál es el área de un parque rectangular que tiene 10,5 m de largo por 800 cm de ancho?

12. La ventana de una casa tiene forma de romboide, como se muestra en la figura.



¿Cuál es el área de la ventana?

Longitudes y áreas de figuras circulares

Ejercitación

13. Responde las preguntas sabiendo que el diámetro de una circunferencia mide 10 cm.

a. ¿Cuál es el área del círculo?

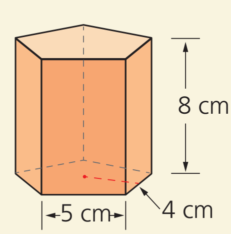
b. ¿Cuál es la longitud del arco cuyo ángulo central mide 60º?

c. ¿Cuál es el área del sector circular cuyo ángulo central mide 85º?

Áreas de sólidos geométricos

Ejercitación

14. Calcula el área lateral y el área total del prisma regular pentagonal de la figura.



15. Calcula el área total de un cilindro de 12 cm de altura y 3 cm de radio.

5

BLOQUE

Estadística
y Probabilidad

Estadística y Probabilidad

En la vida existen diversas situaciones en las que no se puede predecir con certeza lo que va a ocurrir; por ejemplo, si juegas a la lotería no puedes conocer de antemano el número ganador, o si decides invertir en un negocio no será posible determinar lo acertado de tu decisión hasta que el proyecto concluya.

- Enuncia tres situaciones en las que no puedes predecir el resultado final.



Cultura del Buen Vivir

La prudencia

Una persona prudente es aquella que actúa con precaución y que se modera al hablar.

- ¿Qué importancia tiene la prudencia a la hora de tomar una decisión?

Aprenderás...

- Variables, datos y frecuencias
- Gráficas estadísticas
- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión
- Experimentos aleatorios y probabilidad

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

Actitud hacia el riesgo

La ley general establece que a un mayor riesgo corresponde un mayor rendimiento y viceversa. De allí que podamos diferenciar en el humano tres actitudes frente al riesgo:

- **Búsqueda o deseo por el riesgo**, en donde ubicamos al individuo que busca el riesgo porque le da satisfacción. Esta persona, al enfrentarse a posibilidades de inversión selecciona la de mayor riesgo, a pesar, incluso, de que en el abanico de inversiones presenten igual rendimiento. Los buscadores de riesgo no tienen grandes expectativas sobre los rendimientos sino sobre el placer o satisfacción que dicho riesgo le produce. En esta categoría podemos encontrar al típico jugador que busca ganar a toda costa sin que importe la gran probabilidad que tiene de perder.
- **Aversión hacia el riesgo**, en donde ubicamos al inversionista común que, frente a la inversión en igualdad de condiciones, tenderá a seleccionar la que tenga menor riesgo. Esta situación implica que a medida que el riesgo de la inversión aumenta, su satisfacción tiende a disminuir; es decir, que como el riesgo no le produce gran satisfacción requiere muy altos rendimientos para poder asumir pequeñas cantidades adicionales de él.
- **Indiferencia al riesgo**, donde ubicamos al individuo que no siente aversión ni tendencia hacia el riesgo, ya que su grado de satisfacción es proporcional a los rendimientos que produzca la inversión. Por esto se puede decir que, aun cuando sí le interesa el riesgo, su grado de compensación está en equilibrio.

Merchan, Vianca.(2007). Evaluación Ex Post de un Portafolio de Inversiones en Acciones de Noviembre de 2007 a Septiembre de 2011. Recuperado de: http://www.inosanchez.com/files/mda/fpenf/i_05_el_riesgo_en_la_inversion_w.pdf

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué diferencias encuentras entre la primer y la tercer actitud frente al riesgo?

Argumenta

2. ¿Por qué crees que las personas obtienen satisfacción al tomar riesgos?
3. ¿Existe alguna manera de minimizar los riesgos al invertir en un proyecto? Explica.

Propón

4. Supón que has decidido crear tu propio negocio. ¿Qué información debes tener en cuenta para que este sea rentable?

1 Variables, datos y frecuencias

Explora

En un estudio estadístico aplicado a un grupo de estudiantes universitarios, se consideran las siguientes variables estadísticas: estatura, edad, deporte que practica, comida favorita, número de hermanos, peso y profesión de los padres.



- ¿Cuáles de esas variables se pueden expresar numéricamente?

De las variables consideradas en el estudio, las que se pueden medir son: la estatura, la edad, el peso y el número de hermanos. A este tipo de variables se les llama **cuantitativas**. Las demás variables (el deporte que practica, la comida favorita y la profesión de los padres) se denominan variables **cualitativas**, y representan características no medibles.

Una **variable estadística** es una propiedad que se puede estudiar en una población y que permite clasificar a los individuos o elementos de la misma.

En estadística se estudian dos tipos de variables.

- **Cuantitativas**: si se pueden medir y expresar con un número.
- **Cualitativas**: si representan una característica que no se puede medir.

Cada uno de los valores que puede tomar una variable se conoce como **dato**. Cuando una variable cuantitativa solo puede tomar valores aislados que se expresan mediante números enteros, se dice que es una **variable cuantitativa discreta**. De otro lado, si la variable puede tomar todos los valores de un intervalo predeterminado, se dice que es **continua**.

Ejemplo 1

La estatura es una variable estadística continua, ya que puede tomar valores como 1,28 m, 1,56 m o 1,36 m; mientras que el número de hermanos es una variable discreta, pues solo puede tomar valores enteros como cero, uno, tres, cinco...

Los datos de un estudio estadístico se disponen en tablas, las cuales permiten clasificar y organizar la información recogida.

Para un conjunto de datos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ obtenidos en un estudio estadístico:

- La **frecuencia absoluta f_i** indica el número de veces que aparece un dato x_i en el estudio estadístico.
- La **frecuencia relativa h_i** es el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato x_i y el número total de datos.
- La **frecuencia absoluta acumulada F_i** es la suma de la frecuencia absoluta de un dato x_i y la de los datos menores que él.

Ten en cuenta

La suma N de las frecuencias absolutas es igual al número de datos.

$$N = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.

Ejemplo 2

En un centro recreativo para adultos mayores se realizó una encuesta a 25 personas con el fin de saber cuántos días por semana van a este centro. En la encuesta se obtuvieron los siguientes resultados:

5 2 3 1 2 4 5 4 2 1 5 5 3 4 2 1 4 4 5 4 5 5 5 1 3

Los datos recogidos se organizaron en la Tabla 1.

Número de días por semana	1	2	3	4	5
Número de personas	4	4	3	6	8

Tabla 1

En esta tabla se observa que, por ejemplo, hay seis adultos mayores que van al centro recreativo cuatro veces por semana; esto significa que la frecuencia absoluta del dato "van cuatro veces por semana" es 6.

Ten en cuenta

La estadística, que es una ciencia tan antigua como la escritura, es una rama de las matemáticas que estudia y aplica métodos para recoger, organizar, analizar e interpretar información con el propósito de tomar decisiones. Otras ciencias como la economía, la medicina y la ingeniería hacen uso de ella.

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.
Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Ejemplo 3

La Tabla 2 muestra las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de los datos del Ejemplo 2.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
1	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	4
2	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	$4 + 4 = 8$
3	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	$4 + 4 + 3 = 11$
4	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	$4 + 4 + 3 + 6 = 17$
5	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	$4 + 4 + 3 + 6 + 8 = 25$
	Suma = 25	Suma = 1	

Tabla 2

En esta tabla, el valor 17 de la columna de frecuencias absolutas acumuladas indica el número de personas que asisten como máximo cuatro días por semana al centro recreativo.

Ten en cuenta

Las frecuencias relativas expresan el porcentaje o tanto por ciento de la población que tiene ese dato.

Por ejemplo, de la Tabla 2 se deduce que un 16% de las personas encuestadas visita el centro recreativo una vez por semana, mientras que un 24% lo visita cuatro veces por semana.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Lee y resuelve.

- Se les preguntó a diez estudiantes de séptimo grado por su número de hermanos y se obtuvieron estos datos: 0 2 2 0 1 2 3 1 3 1.

a. Organiza la información en una tabla y halla las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas acumuladas.

b. ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada del dato "dos hermanos" y qué representa esta frecuencia en el contexto del problema?

c. ¿Qué porcentaje de personas tiene un hermano?

Solución:

a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias absolutas acumuladas
0	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	2
1	3	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	5
2	3	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	8
3	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	10

Tabla 3

b. La frecuencia acumulada de "dos hermanos" es 8, y significa que ocho personas tienen dos hermanos o menos.

c. $0{,}3 \cdot 100 = 30\%$ de personas tienen un hermano.

Ten en cuenta

En estadística, una **población** es el conjunto de todos los elementos sobre el que se hace un estudio estadístico y una **muestra** es un subconjunto de la población.

CULTURA del Buen Vivir

La prudencia

El análisis de datos a partir de las gráficas estadísticas permite tomar decisiones justas y adecuadas. Esto demuestra prudencia de nuestra parte frente a esas decisiones o acciones.

- ¿En qué tipo de situaciones consideras prudente realizar un estudio estadístico y analizar los resultados?

1 Variables, datos y frecuencias

Comunicación

2 Clasifica cada variable estadística en cualitativa o cuantitativa. En caso de ser cuantitativa, indica si es discreta o continua.

a. Número de estudiantes aprobados en un curso
b. Peso de los recién nacidos en un hospital
c. Color favorito de un grupo de compradores de un almacén de ropa
d. Peso de los melones de una frutería
e. Cantidad de libros leídos en un año por cada uno de los estudiantes de un colegio
f. Número de pétalos de una flor

3 Copia en tu cuaderno la Tabla 4 y ubica en ella cada una de las siguientes variables estadísticas, según sea su clasificación.

Variables estadísticas		
Cualitativas	Cuantitativas	
	Variables discretas	Variables continuas

Tabla 4

a. Peso que transporta un camión
b. Número de pulsaciones por minuto
c. Profesión
d. Color de los ojos
e. Número de los estudiantes de un curso
f. Perímetro craneal
g. Estado civil
h. Edad
i. Cantidad de empleados de una empresa
j. Longitud de la palma de una mano
k. Número de libros vendidos en una librería
l. Distancia de una ciudad a otra
m. Sexo de los recién nacidos en un hospital
n. Temperaturas mínimas registradas en una ciudad
o. Número de veces que una familia va al cine al año
p. Género de película favorito

Razonamiento

4 Halla las frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas correspondientes a cada deporte, si se sabe que de 600 jóvenes que asisten a un polideportivo, el 40% juega fútbol, el 18% practica baloncesto, el 12% opta por la natación, el 26% se dedica al ciclismo y el resto, hace aeróbicos.

Ejercitación

5 Elabora una tabla de frecuencias para cada conjunto de datos.

a. Las edades de los miembros de una compañía de teatro juvenil:

15 17 14 19 17 16 13 12 15 16 13
12 19 13 12 18 17 16 15 14 13 12

b. La estatura, en centímetros, de los integrantes de un equipo de baloncesto:

175 177 178 179 185 184
175 178 178 179 181 190

6 Halla la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los resultados que se obtienen al lanzar al aire una moneda 20 veces, a partir de los datos consignados en la Tabla 5.

Lanzamiento	Resultado	Lanzamiento	Resultado
1	Cara	11	Cara
2	Sello	12	Cara
3	Cara	13	Sello
4	Cara	14	Cara
5	Sello	15	Sello
6	Cara	16	Sello
7	Cara	17	Cara
8	Cara	18	Cara
9	Sello	19	Sello
10	Sello	20	Sello

Tabla 5

7 Completa cada tabla de frecuencias.

a.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1		
2	5	7
3	3	
4		14

Tabla 6

b.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	40	
2		0,1
3		0,25
4		0,25

Tabla 7

Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos agrupados y no agrupados, procesados en tablas de frecuencias para hallar frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Razonamiento

8 Analiza la veracidad de la afirmación: "La frecuencia absoluta de un dato en un estudio estadístico puede ser igual a su frecuencia relativa".

Resolución de problemas

9 Lanza cincuenta veces un dado de seis caras.

a. Registra los resultados de cada lanzamiento.

b. Realiza una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los resultados.

10 En una encuesta realizada en los veinte apartamentos de un conjunto residencial, se preguntó acerca del número de habitantes en cada uno, la cantidad de mascotas y el número de carros que poseían. Las respuestas se registraron en la Tabla 8.

Apto.	Número de habitantes	Número de mascotas	Número de carros
101	4	1	1
102	4	0	1
201	3	0	2
202	1	1	1
301	1	1	0
302	4	0	1
401	3	0	1
402	2	0	2
501	2	0	1
502	4	1	2
601	5	0	1
602	3	0	0
701	3	0	0
702	2	0	1
801	4	1	1
802	3	0	1
901	2	0	0
902	3	1	0
1001	3	0	2
1002	2	2	2

Tabla 8

a. ¿Cuáles y de qué tipo fueron las variables estadísticas consideradas en la encuesta?

b. ¿Cuántas personas viven en el conjunto residencial?

c. ¿Qué porcentaje de familias tiene solamente un carro?

d. ¿Qué porcentaje de familias no tiene mascota?

11 Los siguientes datos corresponden a la temperatura mínima (en grados Celsius) registrada durante el mes de febrero en una ciudad.

12	11	10	11	10	9	8
10	11	9	9	12	11	10
9	5	3	7	7	8	5
6	8	6	10	10	12	8

a. Organiza la información en una tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

b. ¿Cuál fue la temperatura mínima registrada en febrero?

c. ¿Cuántos días de ese mes la temperatura fue por lo menos de 8 °C?

d. ¿Qué porcentaje de los días de febrero la temperatura fue de 6 °C?

e. Comprueba que la suma de las frecuencias absolutas es igual al número de datos y que la suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

12 Los resultados de una encuesta realizada a diez estudiantes se muestran en la tabla de la Figura 1.

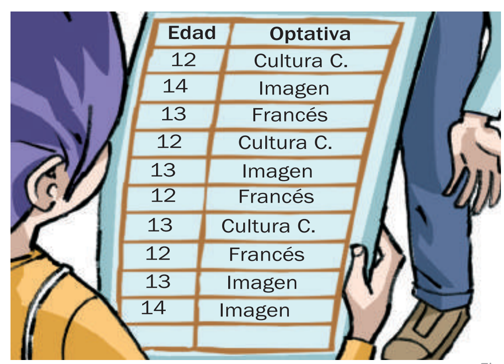


Figura 1

Alberto ha completado la tabla de doble entrada (Tabla 9) con los datos de la encuesta. Sofía, solo con mirar una casilla de esa tabla, asegura que está mal elaborada. Explica por qué Sofía dice eso y corrige la tabla.

		Materia optativa			
		Cultura C	Imagen	Francés	Total
Edad	12	2	1	1	4
	13	1	2	2	5
	14	0	2	0	2
	Total	3	5	3	11

Tabla 9

13 Los estudiantes de un centro escolar visitan un jardín botánico y tienen que tomar tres clases de datos que correspondan a variables cualitativas, variables cuantitativas discretas y variables cuantitativas continuas. ¿Cuáles datos pueden considerar en cada caso?

2 Datos agrupados

Explora

En una biblioteca se van a reubicar los libros en cinco estantes, de manera que los más pesados se ubiquen en los estantes inferiores y los más livianos en la parte superior.

Carlos, el encargado, debe presentar un reporte que permita conocer la cantidad de libros que hay en la biblioteca de acuerdo con su peso.

- ¿Cómo puede presentar el reporte?

Para presentar el reporte, Carlos puede realizar una tabla como la 1 en la cual agrupe los libros de acuerdo con su peso en intervalos disjuntos de igual amplitud.

Peso de los libros (en gramos)	Número de libros
[100, 200)	40
[200, 300)	65
[300, 400)	45
[400, 500)	35
[500, 600)	35
[600, 700)	38

Tabla 1



De la tabla se puede inferir que hay 258 libros en la biblioteca, que los más livianos pesan entre 100 g y 200 g, y los más pesados entre 600 g y 700 g.

Si una variable estadística es cuantitativa continua o cuantitativa discreta con un número grande de datos, conviene agrupar dichos datos en **intervalos** o **clases** que tengan la misma **amplitud,** es decir la misma cantidad de números en cada intervalo.

En cada intervalo se toma un valor representativo llamado **marca de clase**, que corresponde al valor medio del intervalo. Para hallar la marca de clase, se suman los extremos del intervalo y se divide el resultado entre dos.

Ten en cuenta

Cada uno de los intervalos en los que se agrupan los datos incluye el extremo izquierdo pero no el derecho. Por ejemplo, el intervalo [9, 11) indica que este incluye el valor 9 pero no el valor 11.

Ejemplo 1

A cuarenta estudiantes se les solicitó medir el tiempo (en minutos) que navegaron por internet durante un fin de semana. Los resultados obtenidos ordenados de forma ascendente son:

0	15	20	35	35	38	40	45
45	45	50	55	58	65	65	70
72	90	95	100	100	110	110	110
120	125	125	130	130	130	150	160
170	175	180	185	190	195	200	220

Para resumir la información y organizarla en una tabla de frecuencias, se pueden agrupar los datos en seis intervalos, cada uno de amplitud 40 min, y hallar su frecuencia.

A partir del conteo de los datos que pertenecen a cada intervalo, se obtiene la Tabla 2 de frecuencias absolutas.

Tiempo (en minutos)	Marca de clase	Frecuencia absoluta
[0, 40)	20	6
[40, 80)	60	11
[80, 120)	100	7
[120, 160)	140	7
[160, 200)	180	7
[200, 240)	220	2

Tabla 2

Ten en cuenta

El número de clases en las que se pueden agrupar los datos es variable, pero existe un criterio que aconseja hacer un número de clases aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos.

Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada para analizar el significado de los datos.

Ejemplo 2

Las notas de cincuenta estudiantes de octavo EGB en una prueba de matemáticas se registran de la siguiente manera:

6,8	7,8	5,8	7,9	8,0	10,0	7,5	8,0	6,5	3,3
7,0	3,5	7,0	9,0	5,6	1,5	2,8	4,7	7,5	4,5
7,8	2,8	8,0	8,0	8,0	4,0	7,0	5,5	3,0	8,0
9,3	9,4	3,5	4,6	5,7	7,5	9,5	9,2	3,8	4,9
9,6	8,8	8,9	7,9	5,5	10,0	8,5	9,3	8,4	9,5

La Tabla 3 muestra las notas agrupadas en intervalos de amplitud 1,5, las frecuencias y las marcas de clase.

Nota	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[1,5; 3)	2,25	3	0,06	6	3	0,06	6
[3; 4,5)	3,75	6	0,12	12	9	0,18	18
[4,5; 6)	5,25	9	0,18	18	18	0,36	36
[6; 7,5)	6,75	5	0,1	10	23	0,46	46
[7,5; 9)	8,25	17	0,34	34	40	0,8	80
[9; 10,5)	9,75	10	0,2	20	50	1	100
		$N = 50$	1	100			

Tabla 3

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla la marca de clase del segundo y del sexto intervalo de la Tabla 4, que muestra una distribución de frecuencias de los salarios semanales (en dólares) de 63 empleados de una compañía.

Solución:

Salario ($)	Número de empleados
[50, 70)	8
[70, 90)	10
[90, 110)	16
[110, 130)	14
[130, 150)	10
[150, 170)	5

Tabla 4

La marca de clase se halla dividiendo la suma de los extremos de los intervalos entre 2.

El segundo intervalo es [70, 90)

$$\frac{70 + 90}{2} = 80$$

El sexto intervalo es [150, 170)

$$\frac{150 + 170}{2} = 160$$

2 Haz una tabla estadística agrupando en tres clases los datos correspondientes a los tiempos que tardan diez niños en lavarse los dientes.

1 min 30 s	2 min 45 s	3 min 30 s	1 min 20 s	1 min 30 s
0 min 45 s	3 min 00 s	3 min 15 s	1 min 45 s	2 min 35 s

Solución:

Tiempo	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[0:45; 1:43)	1:14	4	0,4	40	4	0,4	40
[1:43; 2:41)	2:12	2	0,2	20	6	0,6	60
[2:41; 3:39)	3:10	4	0,4	40	10	1	100

En esta situación la amplitud de cada intervalo es 58 s.

Tabla 5

Ten en cuenta

En una tabla estadística usualmente la frecuencia absoluta se nota f_i, la frecuencia relativa h_i, la frecuencia absoluta acumulada F_i y la frecuencia relativa acumulada H_i.

CULTURA del Buen Vivir

La prudencia

Es una virtud según la cual es posible reflexionar sobre las consecuencias de lo que se haga o se diga en cualquier circunstancia.

• ¿Qué beneficios crees que trae consigo ser prudente?

App

Gráficas estadísticas

Abre la aplicación *3D Gráficos* y construye diferentes gráficos estadísticos en 3D.



2 Datos agrupados

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Haz una tabla estadística para cada conjunto de datos. Usa intervalos con la amplitud indicada.

a. Intervalos de amplitud 2.

10	11	12,2	13,5	9,5	13,2
11,3	12,3	9	14,2	15	11,3
13,6	15,4	10,2	16,4	15,3	12,3

b. Intervalos de amplitud 25.

90	120	122	95	145	75	66	207	45	77
148	69	110	180	88	90	95	110	85	125

4 Halla la marca de clase de los intervalos de la Tabla 6 en los que se agruparon los datos recogidos sobre el ahorro de 100 familias a lo largo de un año.

Ahorro (en dólares)	Número de familias
[0, 600)	39
[600, 1 200)	15
[1 200, 1 800)	25
[1 800, 2 400)	11
[2 400, 3 000)	10

Tabla 6

Comunicación

5 Completa la Tabla 7.

Intervalo de clase	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 10)		6		6
[10, 20)		4		
[20, 30)		7		17
[30, 40)		5		
[40, 50)		3		
[50, 60)		5		

Tabla 7

6 Explica por qué las tablas 8 y 9 no representan las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.

a.

Intervalo	f_i
[0, 5)	3
[5, 10)	4
[10, 14)	5
[14, 19)	6
[19, 24)	1

Tabla 8

b.

Intervalo *i*	f_i
[0, 5)	1
[5, 10]	2
[10, 15)	4
[15, 20)	2
[20, 25)	3

Tabla 9

7 Determina si a partir de la información de la Tabla 10 se pueden deducir las conclusiones que se muestran abajo.

Intervalo	Marca de clase	f_i
[100, 150)	125	2
[150, 200)	175	3
[200, 250)	225	4
[250, 300)	275	2
[300, 350)	325	4

Tabla 10

a. El número total de datos es 15.
b. El 350 no pertenece al conjunto de datos.
c. La frecuencia de 225 es 4.
d. 125, 175, 225, 275 y 325 son datos del conjunto.
e. Nueve datos son menores que 250.

Razonamiento

8 Observa la Tabla 11, que agrupa mediante intervalos los salarios semanales de los veinte empleados de una microempresa. Complétala y, luego, contesta las preguntas.

Salario (en dólares)	Marca de clase	Número de empleados
[70, 120)		9
[120, 170)		5
[170, 220)		2
[220, 270)		0
[270, 320)		2
[320, 370)		1
[370, 420)		1

Tabla 11

a. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?
b. ¿Cuántos empleados ganan $ 320 o más?
c. ¿Qué porcentaje de ellos gana menos de $ 250?
d. ¿Qué porcentaje de empleados gana más de $ 250?

9 Completa la Tabla 12.

Intervalo	Marca de clase	f_i	F_i
[2, 7)			4
[7, 12)		3	
[12, 17)		2	
[17, 22)			10

Tabla 12

Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada para analizar el significado de los datos.

Resolución de problemas

10 En un parqueadero se registra el tiempo de permanencia (en minutos) de 60 autos, así:

15	450	18	20	25	27	30	32	320	34
36	36	40	135	40	45	142	55	58	60
65	68	136	71	72	73	73	148	75	80
81	82	85	96	98	105	110	112	120	126
127	130	69	140	40	145	50	74	148	220
250	34	330	350	360	370	420	425	430	18



a. Elabora una tabla estadística para estos datos agrupándolos en ocho intervalos.

b. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

c. ¿Es posible determinar qué porcentaje de los autos permanecen menos de una, dos, tres o cuatro horas en el parqueadero?

11 En una vía en la que la máxima velocidad permitida es 80 km/h, se midió la rapidez de veinte autos que transitaron de 9:00 p. m. a 10:00 p. m. Los datos obtenidos se consignaron en la Tabla 13.

Velocidad (km/h)	Número de autos
[60, 70)	4
[70, 80)	14
[80, 90)	1
[90, 100)	1

Tabla 13

a. Halla la marca de clase para cada intervalo.

b. ¿Es posible determinar el número de autos que superaron el límite de velocidad permitido? En caso afirmativo, ¿cuál es el porcentaje correspondiente?

c. ¿Qué porcentaje de autos transitaba a una velocidad inferior a 70 km/h?

12 Las alturas, en centímetros, de veinte plantas de una determinada especie son:

6,1	5,3	6,2	5,6	4,8	4,9	5,2	5,6	6,1	6,2
5,9	5,8	5,7	5,1	4,9	5,2	5,3	6,1	5,9	5,8

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en siete intervalos, y halla la marca de clase de cada uno.

13 Los pesos de 60 personas dados en kilogramos son:

66	65	59	82	64	55	76	64	67	71	48	52
65	69	80	58	65	70	67	73	71	60	72	79
68	71	82	55	63	70	65	52	64	61	68	62
65	72	56	61	72	66	62	64	69	65	74	60
62	62	74	60	69	65	63	71	62	72	78	51

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en clases de amplitud 5 y halla la marca de clase de cada uno.

14 En la Tabla 14 se registra la edad de los pacientes que asisten a un consultorio médico en una semana.

Edad (en años)	Número de pacientes
[20, 30)	2
[30, 40)	4
[40, 50)	14
[50, 60)	17
[60, 70)	5
[70, 80)	6
[80, 90)	2

Tabla 14

a. Halla la marca de clase de cada intervalo.

b. ¿Cuántos pacientes asisten en una semana al consultorio médico?

c. ¿Qué porcentaje de pacientes son menores de 50 años?

15 Se realiza una encuesta a los alumnos de tres cursos de séptimo grado acerca del tiempo que tardan en tender la cama. Los resultados se registran en la Tabla 15.

Duración (minutos)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)
Número de alumnos	11	0	25	28	4

Tabla 15

a. ¿Hay algún estudiante que tarde seis minutos en tender la cama? ¿Y un minuto? Explica tus respuestas.

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes tarda al menos cuatro minutos en tender la cama?

c. ¿Qué porcentaje tarda mínimo dos minutos en tenderla?

d. ¿Es posible determinar el número de estudiantes que tardan exactamente dos minutos en tender la cama?

3 Gráficas estadísticas

Explora

En Tercero de BGU se realiza una encuesta sobre el destino preferido para realizar la excursión de fin de año. Los datos obtenidos se organizan en la Tabla 1.

Posibles destinos de excursión	Votos
Mompiche	5
Santa Elena	9
Cuenca	7
Puyo	10
Machala	4

Tabla 1

- Si se quieren mostrar los resultados a los padres de familia de una forma clara y fácil de entender, ¿cuál es la manera más práctica de hacerlo?

Deporte	f_i	h_i
Fútbol	43	0,339
Atletismo	27	0,212
Baloncesto	14	0,110
Natación	31	0,244
Ciclismo	12	0,094

Tabla 2



Figura 2

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.vitutor.com/estadistica/descriptiva/a_4_e.html

Obtén más información acerca de estadística descriptiva.

3.1 Gráficas estadísticas para datos no agrupados

La información que se recogió en la encuesta puede representarse con una gráfica de barras rectangulares, cuyas longitudes sean proporcionales a los datos recolectados o frecuencias absolutas. La gráfica de la Figura 1 comunica de manera efectiva los resultados de la encuesta.

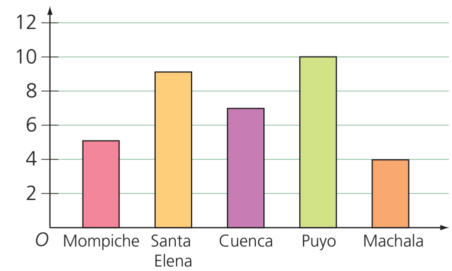


Figura 1

Un **diagrama de barras** se utiliza para presentar datos cualitativos o datos cuantitativos de tipo discreto. En el eje horizontal se ubican las variables y en el eje vertical, las frecuencias.

Para representar datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas también es útil el uso de **diagramas circulares**. Este tipo de diagramas distribuye la superficie de un círculo en sectores de amplitud proporcional a la **frecuencia relativa** de cada dato.

Ejemplo 1

En la Tabla 2 se muestran los datos obtenidos sobre las preferencias deportivas de un grupo de 127 estudiantes. Para calcular la amplitud del ángulo central que le corresponde a cada dato en un diagrama circular, se multiplica cada frecuencia relativa (h_i) por 360° (como se observa en la cuarta columna de la Tabla 3). La Figura 2 presenta el diagrama circular correspondiente al estudio.

Deporte	f_i	h_i	Medida del ángulo central
Fútbol	43	0,339	0,339 · 360° = 122°
Atletismo	27	0,212	0,212 · 360° = 76°
Baloncesto	14	0,110	0,110 · 360° = 40°
Natación	31	0,244	0,244 · 360° = 88°
Ciclismo	12	0,094	0,094 · 360° = 34°

Tabla 3

Los **gráficos** o **diagramas de líneas** muestran un conjunto de puntos conectados mediante una sola línea. Estos gráficos se usan principalmente para mostrar las variaciones de una o más variables estadísticas con respecto al cambio de otra variable, comúnmente el tiempo.

Ejemplo 2

La Tabla 4 presenta la variación del número de estudiantes matriculados en los primeros grados de un colegio desde 1995 hasta 2011, y la Figura 3 muestra el diagrama de líneas correspondiente.

	1.º	2.º	3.º
1995	5	15	28
1999	7	17	18
2003	7	31	50
2007	14	21	13
2011	24	25	35

Tabla 4

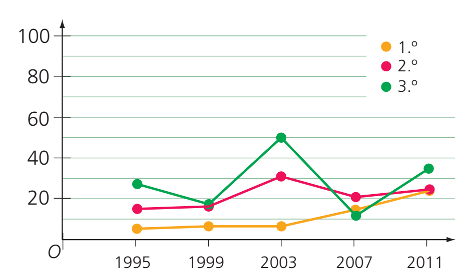


Figura 3

Destrezas con criterios de desempeño: Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada y representarlos gráficamente con ayuda de las TICs.
Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos.

3.2 Gráficas estadísticas para datos agrupados

Para hacer la representación gráfica de datos agrupados en clases, se utilizan los **histogramas** y los **polígonos de frecuencias**.

Para construir un histograma se siguen estos pasos.

1. Se dibujan los extremos de las clases sobre el eje de abscisas.
2. Se construyen rectángulos cuyas bases son la amplitud del intervalo. Si son todas iguales, las alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas.

Un **polígono de frecuencias** se forma uniendo los puntos medios de las barras de un histograma en su parte superior mediante segmentos.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Haz un histograma y el polígono de frecuencias con los datos recogidos en la Tabla 5 correspondientes a la estatura de los 30 estudiantes de un curso.

Estatura (cm)	Número de estudiantes
[149, 156)	7
[156, 163)	10
[163, 170)	8
[170, 177)	5

Tabla 5

Solución:

En la Figura 4 se encuentran el histograma y el polígono de frecuencias.

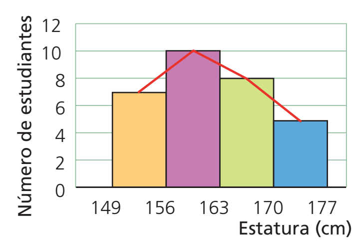


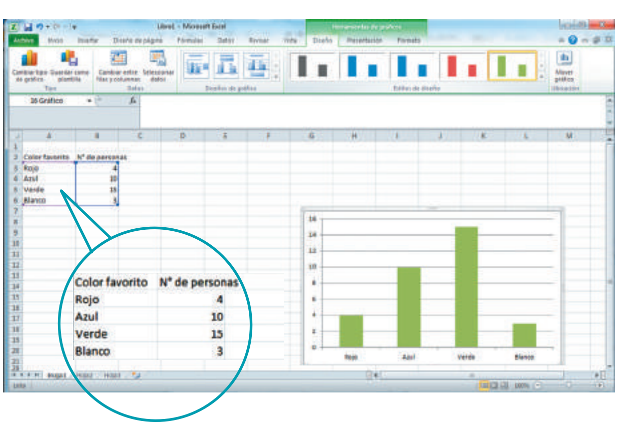
Figura 4

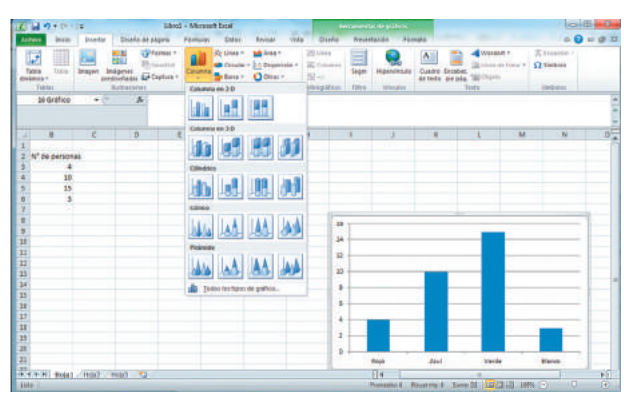
MatemaTICS

Construye gráficos estadísticos con Excel

Para crear un **diagrama de barras** en Excel de una variable cualitativa, primero se deben digitar los datos en una tabla y luego, se sigue el procedimiento descrito a continuación.

- Selecciona los datos de la tabla, ve a la pestaña *Insertar* y dentro del grupo **Gráficos** haz clic en el icono y luego en la opción *Columna agrupada*. En Excel se muestra el diagrama de barras correspondiente.
- Para cambiar el color de las barras o el estilo del gráfico, selecciona el gráfico; en la parte superior se despliegan diferentes opciones para hacer los cambios que se deseen, e incluso, puedes cambiar el tipo de gráfico.





3 Gráficas estadísticas

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Escribe tres conclusiones que puedas obtener a partir de los gráficos de las Figuras 5 y 6.

a.

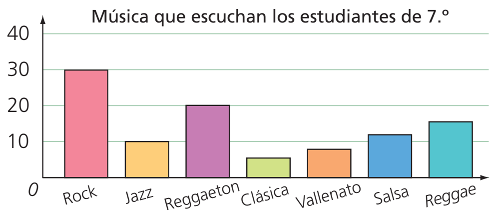


Figura 5

b.

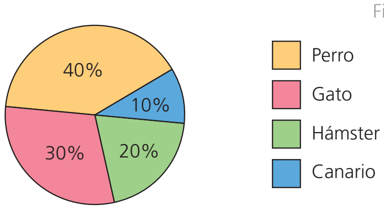


Figura 6

Comunicación

3 Relaciona cada tabla con la representación gráfica que le corresponde.

a.

1	12
2	24
3	48
4	6
5	3

Tabla 6

( )

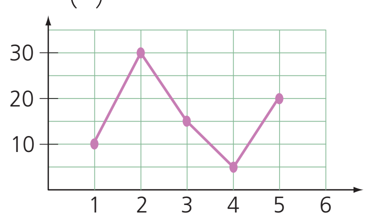


Figura 7

b.

1	10
2	30
3	15
4	5
5	20

Tabla 7

( )

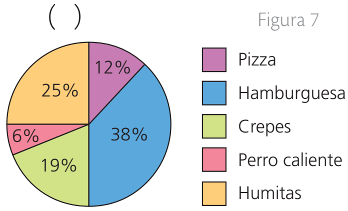


Figura 8

c.

Pizza	12
Hamburguesa	24
Crepes	48
Perro caliente	6
Humitas	3

Tabla 8

( )

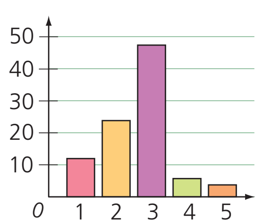


Figura 9

d.

Pizza	10
Hamburguesa	30
Crepes	15
Perro caliente	5
Humitas	20

Tabla 9

( )

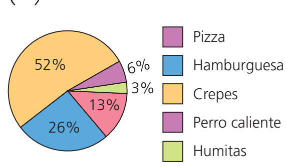


Figura 10

Razonamiento

4 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Un conjunto de datos cualitativos se puede representar mediante un histograma. ( )

b. En un diagrama circular se pueden representar solo datos cualitativos. ( )

c. Un polígono de frecuencias se utiliza para representar datos cuantitativos. ( )

d. Un histograma y un diagrama de barras representan un conjunto de datos mediante rectángulos. ( )

e. El diagrama más apropiado para representar el cambio de una variable a través del tiempo es un histograma. ( )

Modelación

5 Represente en un diagrama circular los datos que se muestran en la Tabla 10, que corresponden al número de órganos donados en un país durante el año 2010.

Órgano	Número de órganos donados
Riñón	2 794
Hígado	1 302
Corazón	324
Pulmón	157

Tabla 10

6 Representa mediante un diagrama de barras y un diagrama circular la información registrada en la Tabla 11 sobre el deporte preferido de un grupo de estudiantes.

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación
Alumnos	305	215	80

Tabla 11

7 Elabora un diagrama de líneas con las temperaturas promedio de los últimos seis meses del año 2014 en Quito, Cuenca y Latacunga que se registran en la Tabla 12.

	Quito	Cuenca	Latacunga
Julio	28° C	25° C	16° C
Agosto	23° C	22° C	14° C
Septiembre	26° C	22° C	14° C
Octubre	25° C	24° C	12° C
Noviembre	23° C	21° C	10° C
Diciembre	28° C	26° C	13° C

Tabla 12

Destreza con criterios de desempeño: Representar de manera gráfica con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular en función de analizar datos.

Ejercitación

8 Lee y resuelve.

Se realizó una encuesta en un jardín infantil para conocer el tipo de postre preferido por los niños y las niñas. En la Tabla 13 se registraron los datos.

Postres	Número de niños
Chocolatina	20
Gelatina	15
Arroz de leche	12
Galletas rellenas	18
Helado	25
Donas	10

Tabla 13

Representa en un diagrama circular y en un diagrama de barras la anterior información.

Comunicación

9 Elige una de las preguntas, aplica una encuesta a tus compañeros de curso y prepara una exposición con los resultados.

¿Cuál es tu pasatiempo favorito?

¿Cuál es tu peso?

¿Cuántos hermanos tienes?

10 Construye un gráfico circular para mostrar la siguiente información.

Nuestro sistema solar tiene ocho planetas, de los cuales cuatro son de tipo rocoso, es decir, están formados por roca y metal: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Los otros cuatro planetas son de tipo gaseoso, lo que significa que están compuestos por gases muy densos en su atmósfera. A este último tipo corresponden: Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

11 Lanza un dado veinte veces, completa una tabla en la que muestres cuántas veces salió cada número y elabora el diagrama de barras de tus resultados en la Figura 11.

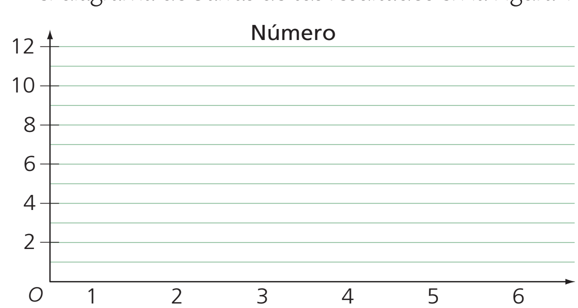


Figura 11

Comunicación

12 Observa las figuras 12 y 13, que muestran las temperaturas promedio en dos ciudades de Ecuador en una semana. Luego, responde.

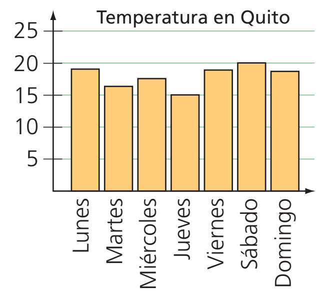


Figura 12

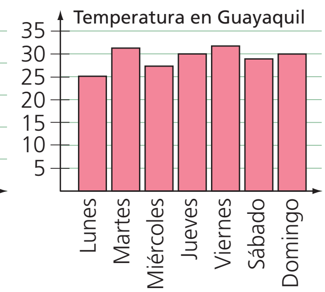


Figura 13

a. ¿Cuál fue la temperatura máxima en la ciudad de Quito? ¿Qué día se presentó?

b. ¿Cuál fue la temperatura mínima en las dos ciudades?

c. ¿Entre qué valores se encuentra la temperatura en Guayaquil durante la semana en la que se tomaron los datos?

d. ¿Cuál es la temperatura más frecuente en cada una de las ciudades?

13 Haz un histograma y el polígono de frecuencias con los datos de la Tabla 14.

Intervalo	Frecuencias absolutas
[10, 20)	7
[20, 30)	20
[30, 40)	15
[40, 50)	8

Tabla 14

Resolución de problemas

14 Completa la Tabla 15 con los datos del diagrama circular de la Figura 14. Ten en cuenta que el total de las personas encuestadas es 200.

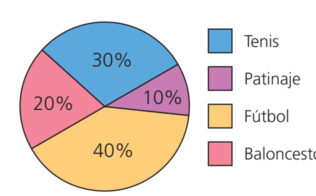


Figura 14

Deporte	Número de personas	Porcentaje	Ángulo
Fútbol		40%	
Baloncesto		20%	
Tenis		30%	
Patinaje		10%	

Tabla 15

4 Media aritmética

Explora

Julián hizo un recorrido diario durante su preparación para participar en una carrera. Él registró la distancia que recorrió durante una semana en la Tabla 1.

Días	Distancia (km)
Lunes	11,4
Martes	12,1
Miércoles	12,5
Jueves	10,8
Viernes	11,3
Sábado	12,4
Domingo	11,5

Tabla 1

- Si la distancia promedio la semana anterior fue de 12,3 km, ¿se puede afirmar que esta semana obtuvo un mejor promedio?

En la calculadora

Media aritmética de un conjunto de datos

Para hallar la media aritmética en la calculadora se utilizan las teclas MENU, F2 y F1. Por ejemplo, la media aritmética de 7, 6, 6 y 3 se calcula digitando en la calculadora la secuencia:

MENU 2 7 EXE 6 EXE 6 EXE 3 EXE F2 F1

El primer valor obtenido corresponde a la media de este conjunto de datos.

- Identifica cómo hallar la media en tu calculadora y halla la media de los números 5, 6, 7 y 8.

Para determinar el promedio de la distancia recorrida por Julián durante la semana, se suman las distancias y se divide entre el número de días.

$$\frac{11{,}4 + 12{,}1 + 12{,}5 + 10{,}8 + 11{,}3 + 12{,}4 + 11{,}5}{7} = \frac{82}{7} = 11{,}71 \text{ km}$$

Al comparar el promedio de distancia recorrida por Julián la semana anterior con el obtenido esta semana, se puede concluir que su promedio bajó con respecto a la semana previa, pues $11{,}71 < 12{,}3$.

La **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de datos es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de estos.

Ejemplo 1

La primera columna de la Tabla 2 muestra el tiempo semanal en horas que dedica a navegar por internet un grupo de estudiantes; la segunda columna indica la frecuencia absoluta de cada tiempo, y en la tercera se calcula el producto de cada tiempo por su frecuencia.

Tiempo en horas	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
3	3	$3 \cdot 3 = 9$
4	5	$4 \cdot 5 = 20$
5	15	$5 \cdot 15 = 75$
6	6	$6 \cdot 6 = 36$
7	4	$7 \cdot 4 = 28$
8	2	$8 \cdot 2 = 16$
Total	35	184

Tabla 2

Por tanto, en promedio los estudiantes navegan por internet $\frac{184}{35} = 5{,}26$ horas semanales.

4.1 Media ponderada

En ocasiones, no todos los datos de la variable tienen la misma importancia. En tal caso, se multiplican los datos por distintos números, que se denominan pesos y que modifican su valor.

Para calcular la **media aritmética ponderada** se siguen estos pasos.

1. Se multiplica cada dato por su peso y se suman los resultados.
2. Se divide la cantidad obtenida por la suma de los pesos.

Ejemplo 2

En un concurso, se asigna un puntaje a un ejercicio de salto y otro al tiempo de ejecución, dándole una importancia de siete al primero y de tres al segundo. Clara obtuvo nueve en salto y seis en tiempo de ejecución. ¿Cuál fue su puntuación final?

$$\frac{9 \cdot 7 + 6 \cdot 3}{7 + 3} = \frac{81}{10} = 8{,}1$$

La puntuación de Clara es 8,1.

El valor calculado es la media aritmética ponderada.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media,) y de un conjunto de datos en la solución de problemas.

4.2 Media aritmética de datos agrupados

Para calcular la **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de **datos agrupados**, se deben calcular las marcas de clase de los intervalos, luego se multiplican las marcas de clase por sus frecuencias absolutas respectivas y finalmente, se divide la suma de estos productos por el total de datos.

Ejemplo 3

En la Tabla 3 se registraron las estaturas de los estudiantes de octavo EGB de un colegio.

Estatura (m)	Número de estudiantes
[1,40; 1,45)	2
[1,45; 1,50)	10
[1,50; 1,55)	25
[1,55; 1,60)	5

Tabla 3


Luis Hernández

Para calcular la media aritmética de este grupo de datos, se construye una tabla en la que se agregan dos columnas más: marca de clase (x_i) y producto entre x_i y su correspondiente frecuencia absoluta f_i, como se muestra en la Tabla 4.

Estatura (m)	Marca de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)
[1,40; 1,45)	1,425	2	2,85
[1,45; 1,50)	1,475	10	14,75
[1,50; 1,55)	1,525	25	38,125
[1,55; 1,60)	1,575	5	7,875
	Total	42	63,6

Tabla 4

Entonces, la media aritmética de la estatura de los estudiantes de octavo EGB es:

$$\frac{63,6}{42} = 1,51 \text{ m.}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula la media aritmética del peso de los 35 recién nacidos cuyos pesos en kilogramos se muestran en la Tabla 5.

Solución:

Peso (kg)	Marca de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)
[1,5; 2,0)	1,75	1	1,75
[2,0; 2,5)	2,25	3	6,75
[2,5; 3,0)	2,75	9	24,75
[3,0; 3,5)	3,25	12	39
[3,5; 4,0)	3,75	6	22,5
[4,0; 4,5)	4,25	4	17
		Suma = 35	Suma = 111,75

Tabla 6

Por tanto, la media del peso de los niños es: $\frac{111,75}{35} = 3,19$ kg.

Ten en cuenta

La media aritmética o promedio de un conjunto de datos está comprendida entre el menor y el mayor de los datos del conjunto.

Así, por ejemplo, antes de realizar el cálculo se puede asegurar que la media de los datos 15, 17, 19, 23, 24 y 31 no puede ser menor que 15 ni mayor que 31.



Un bebé al nacer suele pesar entre 2,5 kg y 4,5 kg, y puede medir entre 45 cm y 55 cm.

Peso (kg)	Número de niños
[1,5; 2,0)	1
[2,0; 2,5)	3
[2,5; 3,0)	9
[3,0; 3,5)	12
[3,5; 4,0)	6
[4,0; 4,5)	4
	35

Tabla 5

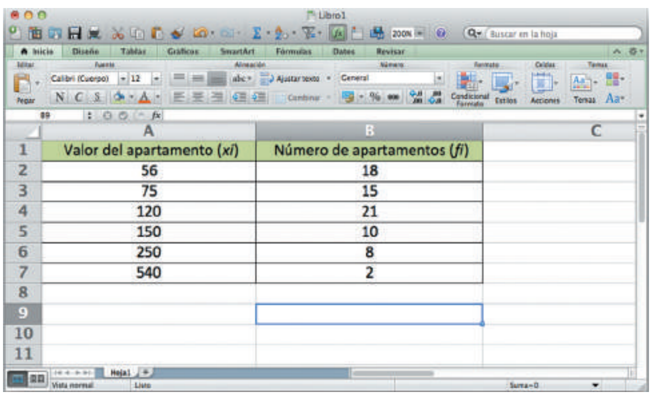
4 Media aritmética

MatemaTICS

Determina la media aritmética con Excel

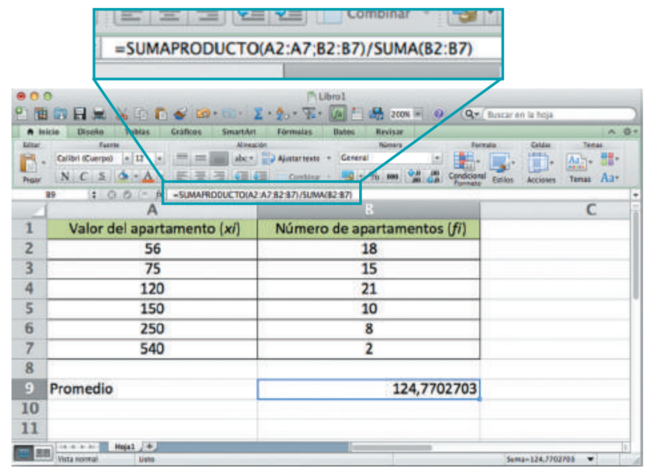
- Observa cómo hallar el costo promedio de un apartamento con Excel.

Primero, consigna los datos en una tabla. Para este caso, en la primera columna escribe el valor en miles de un apartamento (x_i) y, en la segunda, la cantidad de apartamentos con ese valor (frecuencia absoluta f_i.)



	A	B	C
1	Valor del apartamento (xi)	Número de apartamentos (fi)	
2	56	18	
3	75	15	
4	120	21	
5	150	10	
6	250	8	
7	540	2	
8			
9			
10			
11			

Selecciona una celda vacía (B9) y escribe en ella =SUMAPRODUCTO(A2:A7;B2:B7)/SUMA(B2:B7) y luego da ENTER. En la celda B9 se muestra el promedio de los datos.



	A	B	C
1	Valor del apartamento (xi)	Número de apartamentos (fi)	
2	56	18	
3	75	15	
4	120	21	
5	150	10	
6	250	8	
7	540	2	
8			
9	Promedio	124,7702703	
10			
11			

El valor promedio de los apartamentos de la ciudad en la que se hizo el estudio es, en forma aproximada, $ 124 770.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina el valor de x para que la media del conjunto de datos sea la que se indica.

a. La media de 5, 6 y x es 6.

b. La media de 3, 8, x, 2 y 7 es 7.

c. La media de 10, 13, 8, x y 1 es 8.

3 Halla la media en los casos que sea posible hacerlo. En el conjunto que no se pueda calcular, explica la razón.

a. Azul, rojo, rojo, verde, azul, rojo, rojo

b. 1 000, 1 000, 1 000, 1 500, 1 000, 1 500, 1 000, 1 000

c. 5, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 7, 6

d. Masculino, femenino, femenino, femenino

4 Halla la media aritmética de los siguientes conjuntos de datos.

a. 2 1 4 6 3

b. 5 5 5 5 5 5 5 5

c. 7 8 4 3 6 7

d. 6 5 4 3 7 6 5 4 3 0 7 5

5 Lee y responde.

Para hallar la nota de matemáticas, se multiplica por cinco la nota de problemas, por cuatro la nota de cálculo y por uno la nota de teoría.

Si Beatriz tiene unas notas de 8, 7 y 10, respectivamente, ¿cuál es su calificación final?

Modelación

6 Realiza una encuesta a tus compañeros de salón para poder dar respuesta a las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la estatura promedio de los estudiantes de tu curso?

b. ¿Cuál es la edad promedio de los estudiantes de tu curso?

c. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes de tu curso practican deporte semanalmente?

d. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes de tu curso navegan por internet semanalmente?

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Ejercitación

7 Completa las Tablas 7 a 9. Luego, halla la media aritmética de los datos presentados en cada una.

a.

Tiempo	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
2	5	
3	7	
4	6	
5	4	
6	3	
Total		

Tabla 7

b.

N.º hermanos	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
0	16	
1	37	
2	51	
3	23	
Total		

Tabla 8

c.

Edad	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
2	14	
3	20	
4	13	
5	6	
6	30	
7	45	
8	21	
9	12	
Total		

Tabla 9

8 Halla la media aritmética del número de libros leídos por un grupo de integrantes de un club lector a lo largo de un mes, según los datos de la Tabla 10.

Número de libros	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas	4	12	9	6	8	6	1

Tabla 10

9 Halla la media aritmética de la edad de los niños que acuden al servicio de urgencias en el hospital pediátrico teniendo en cuenta los datos registrados en la Tabla 11.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Número de niños	12	8	5	7	3

Tabla 11

10 Completa las tablas 12 a 14 y determina la media aritmética de cada conjunto de datos.

a.

Peso (kg)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[30, 40)		8	
[40, 50)		2	
[50, 60)		11	
[60, 70)		15	
	Total		

Tabla 12

b.

Velocidad (m/s)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[0, 25)		5	
[25, 50)		14	
[50, 75)		30	
[75, 100)		43	
[100, 125)		15	
	Total		

Tabla 13

c.

Sueldo en dólares	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[500, 1 000)		25	
[1 000, 1 500)		54	
[1 500, 2 000)		34	
[2 000, 2 500)		28	
[2 500, 3 000)		28	
[3 000, 3 500)		12	
[3 500, 4 000]		5	
	Total		

Tabla 14

Resolución de problemas

11 En la nota definitiva de la asignatura de inglés, cada estudiante tiene cinco valoraciones. Las valoraciones de Andrés fueron: 7, 8, 9, 10, 6 y se sabe que Mariana sacó la misma definitiva, pero no tuvo las mismas notas. Escribe dos posibles grupos de valoraciones de Mariana.

12 En el curso de pintura barroca, las notas teóricas valen el 30% y las prácticas 70%. Determina la nota definitiva de cada estudiante a partir de las notas registradas en la Tabla 15.

	Notas teóricas				Notas prácticas				
Ana	7	6	8	6	8	8	9	8	7
Juan	3	5	4	6	7	8	8	7	9
Liz	9	9	7	8	10	10	9	10	8
Luis	10	10	9	8	8	9	10	10	10

Tabla 15

5 Moda y mediana

Explora

Los resultados de una encuesta aplicada a 850 estudiantes acerca de la forma en la que se desplazan a su colegio, se recogen en la Tabla 1.

Medio de transporte	f_i
A pie	28
Bicicleta	49
Bus escolar	550
Servicio público	175
Automóvil	48

Tabla 1

- ¿Cuál es el medio de transporte más usado?

Según la tabla, la mayor parte de los estudiantes llega al colegio en el bus escolar, pues es la respuesta que aparece con mayor frecuencia en la encuesta.

5.1 Moda y clase modal

La **moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene la mayor frecuencia absoluta. Si los datos están agrupados en clases, la clase de mayor frecuencia es la **clase modal**; en este caso, el valor de la moda corresponde a la **marca de clase modal**, es decir, al punto medio de la clase.

Ejemplo 1

Las edades de los 550 estudiantes que usan como medio de transporte el bus escolar para llegar al colegio, se presentan agrupadas en la Tabla 2.

Edad	f_i
[5, 8)	220
[8, 11)	115
[11, 14)	87
[14, 17)	83
[17, 20)	45

Tabla 2



Como la mayor frecuencia se presenta en el intervalo [5, 8), esa se considera la clase modal. La moda es la marca de clase de este intervalo, es decir, 6,5 años.

Ten en cuenta

La moda no necesariamente es única, como sí lo son la media y la mediana.

5.2 Mediana y clase mediana

La **mediana** es el valor que ocupa la posición central de todos los datos cuando estos están ordenados de menor a mayor. En un conjunto de **datos agrupados** la mediana se encuentra en la **clase mediana**, para la cual la frecuencia absoluta acumulada es el primer valor mayor o igual a la mitad del tamaño de la muestra.

Ten en cuenta

- Si en un estudio estadístico el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si en el estudio estadístico el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla la moda a partir de la información de la Tabla 3, la cual muestra el tiempo empleado por 20 personas para desayunar.

Tiempo (min)	5	10	12	15	20
Número de personas	2	6	6	4	2

Tabla 3

Solución:

Como 10 minutos y 12 minutos son los datos que se presentan con mayor frecuencia, el conjunto es bimodal.

2 Identifica la clase mediana del conjunto de datos del Ejemplo 1.

En la Tabla 2 se observa que la primera frecuencia absoluta acumulada mayor que la mitad del tamaño de la muestra es 335. Por tanto, la clase mediana es [8, 11).

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Halla la mediana y la moda de cada conjunto de datos.

a. 5 9 8 13 4 0

b. 6 6 3 3 2 2

c. 0 1 2 3 4

d. 9 9 5 3 6 6 6 6 1 1 0 0

e. 24 32 28 40 33 45 28 34 33

f. 50 50 50 30 60 10 80

4 Calcula la clase mediana y la moda de los conjuntos de datos.

a.

Intervalo	Frecuencia
[0, 10)	4
[10, 20)	7
[20, 30)	6
[30, 40)	5
[40, 50)	2

Tabla 4

b.

Intervalo	Frecuencia
[12, 14)	5
[14, 16)	6
[16, 18)	6
[18, 20)	1
[20, 22)	2

Tabla 5

c.

Intervalo	Frecuencia
[70, 75)	3
[75, 80)	2
[80, 85)	1
[85, 90)	6
[90, 95)	2
[95, 100)	7

Tabla 6

Razonamiento

5 Encuentra el dato que falta en cada conjunto de datos para que se cumpla la condición.

a. 5 7 6 5 4 3 7 6 5 *x*. La moda es 5.

b. 21 10 16 18 *x* 23 12 14. La mediana es 16.

6 Explica qué ocurre con la moda y la mediana de los datos 6, 8, 10, 9 y 10, si (a) cada dato

a. se multiplica por 4

b. se le suma 4

c. se eleva al cuadrado

d. se divide entre 2

e. se le suma su doble

f. se le resta 1

Comunicación

7 Propón un conjunto de datos en el que se cumpla cada condición.

a. La moda es menor que la mediana.

b. La moda es mayor que la mediana.

c. La media es igual que la mediana.

d. La media, la moda y la mediana son iguales.

Resolución de problemas

8 En un colegio se llevó a cabo una campaña de reciclaje de envases. Después del conteo, se registraron en una tabla los datos recogidos (Tabla 7).

Tipo de envases	Latas	Papel	Cristal	Plástico	Cartón
Número de envases	617	2 438	445	1 300	711

Tabla 7

¿Qué tipo de envases se recolectaron más?

9 El número de alojamientos rurales en cierta comunidad se distribuye según los datos de la Tabla 8.

Tipo de alojamiento	Número de plazas
Campamentos	160
Viviendas en alquiler	3 600
Albergues	380
Habitaciones en viviendas	1 400

Tabla 8

¿Cuál es la moda de los datos?

10 La Tabla 9 señala el precio de varios computadores personales en una tienda de informática.

Precio en dólares	Número de computadores
[600, 900)	60
[900, 1 200)	124
[1 200, 1 500)	30
[1 500, 1 800)	15
[1 800, 2 100)	3

Tabla 9

Calcula la clase modal, la moda y la clase mediana.

11 La Tabla 10 muestra la cantidad de respuestas correctas de un grupo de 40 estudiantes en un examen de 14 preguntas. Halla la clase modal y la clase mediana.

Número de respuestas	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Número de estudiantes	4	9	15	7	5

Tabla 10

6 Medidas de dispersión

Explora

Juan compara los salarios de dos pequeñas empresas a partir de los sueldos de cinco personas que trabajan en diferentes áreas.
Los sueldos de estos empleados se muestran en la Tabla 1.

Compañía *A*	Compañía *B*
$ 1 200	$ 2 300
$ 1 800	$ 2 400
$ 1 800	$ 2 500
$ 3 000	$ 2 500
$ 4 500	$ 2 600

Tabla 1

- ¿Se puede decir que los salarios en las dos empresas son similares?

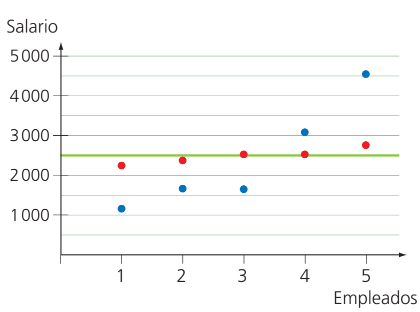


Figura 1

Ten en cuenta

Un diagrama de dispersión muestra los datos como un conjunto de puntos. Para realizar un diagrama de este tipo, se representa cada par de valores como las coordenadas de un punto.

Estatura (cm)	f_i
[150, 160)	18
[160, 170)	24
[170, 180)	14
[180, 190)	7
[190, 200)	1

Tabla 2

Juan toma los cinco salarios de los empleados a los que entrevistó en cada empresa y halla la media correspondiente.

El promedio salarial de la compañía *A* es:

$$\frac{1\,200 + 1\,800 + 1\,800 + 3\,000 + 4\,500}{5} = \$\,2\,460$$

El promedio salarial en la compañía *B* es:

$$\frac{2\,300 + 2\,400 + 2\,500 + 2\,500 + 2\,600}{5} = \$\,2\,460$$

Las dos compañías tienen el mismo promedio o media aritmética. Sin embargo, se observa que los salarios de la compañía *A* se alejan más de la media que los de la compañía *B*. Se dice entonces que los datos salariales de la compañía *A* son **muy dispersos**, mientras que los de la compañía *B* son **poco dispersos**.

Las **medidas de dispersión** son parámetros de centralización que miden la separación de los datos de una distribución respecto a su media. Las más utilizadas son el **rango** o **recorrido**, la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación típica**.

6.1 Rango

El **rango** o **recorrido** de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos. Si los datos están agrupados en clases, el rango se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Ejemplo 1

Los rangos de los salarios de las compañías de la situación inicial son:

Compañía *A*: $ 4 500 − $ 1 200 = $ 3 300

Compañía *B*: $ 2 600 − $ 2 300 = $ 300

Los puntos azules del diagrama de dispersión de la Figura 1 representan los salarios de la compañía *A* y los rojos, los de la compañía *B*.

Ejemplo 2

Las estaturas de los 64 estudiantes de octavo EGB de un colegio se registran en la Tabla 2.

Como el extremo superior del último intervalo es 200 y el extremo inferior del primero es 150, el rango de la distribución es 200 − 150 = 50 cm.

6.2 Desviación media

La **desviación** respecto a la **media** es la diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

Para calcular la desviación media de un conjunto de datos:

1. Se hallan las desviaciones respecto a la media: dato − media
2. Se calculan los valores absolutos de las desviaciones: |dato − media|
3. Se encuentra la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central , medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Ejemplo 3

Las estaturas, en centímetros, de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

Equipo *A*: 190, 192, 195, 198, 200 Equipo *B*: 170, 175, 195, 215, 220

Estatura media del equipo *A*: $\dfrac{190 + 192 + 195 + 198 + 200}{5} = 195$ cm

Estatura media del equipo *B*: $\dfrac{170 + 175 + 195 + 215 + 220}{5} = 195$ cm

Las tablas 3 y 4 presentan las desviaciones con respecto a la media y sus valores absolutos.

Equipo *A*		
Datos	Dato − media	|Dato − media|
190	190 − 195 = −5	5
192	192 − 195 = −3	3
195	195 − 195 = 0	0
198	198 − 195 = 3	3
200	200 − 195 = 5	5
		Suma = 16

Tabla 3

Equipo *B*		
Datos	Dato − media	|Dato − media|
170	170 − 195 = −25	25
175	175 − 195 = −20	20
195	195 − 195 = 0	0
215	215 − 195 = 20	20
220	220 − 195 = 25	25
		Suma = 90

Tabla 4

Las desviaciones medias de las estaturas de los equipos *A* y *B* son:

$$\frac{5 + 3 + 0 + 3 + 5}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \frac{25 + 20 + 0 + 20 + 25}{5} = \frac{90}{5} = 18 \text{ cm}$$

Como la desviación media del equipo *B* es mayor que la del equipo *A*, entonces las estaturas de los integrantes del equipo *B* están más dispersas que las del equipo *A*, como se observa en las figuras 3 y 4.

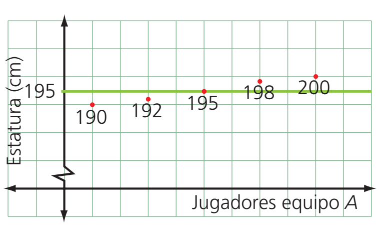


Figura 3

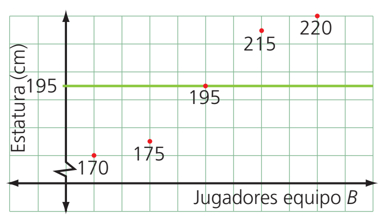


Figura 4

Ten en cuenta

Una desviación media elevada implica mucha variabilidad en los datos, mientras que una igual a cero implica que todos los valores son iguales y, por tanto, coinciden con la media.

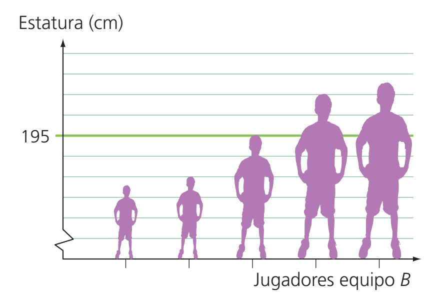


Figura 2

Ten en cuenta

La suma de las desviaciones respecto a la media siempre es 0. Por ello, para hallar la dispersión de los datos se recurre a la desviación media (valor absoluto de las desviaciones respecto a la media) o a la varianza (cuadrado de las desviaciones respecto a la media).

6.3 Varianza y desviación típica

La **varianza** de una distribución estadística es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media. Se representa por s^2 y está dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + f_3(x_3 - \bar{x})^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}$$

La **desviación típica** ***s*** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo 4

Halla la varianza y la desviación típica de las edades 4, 8, 2 y 9 cuya media es 5,75.

Primero, se completa la Tabla 5 incluyendo las desviaciones con respecto a la media y sus cuadrados. De acuerdo con la definición, la varianza y la desviación típica de la distribución son, respectivamente:

$$s^2 = \frac{32{,}75}{4} = 8{,}1875 \Rightarrow s = \sqrt{8{,}1875} = 2{,}86$$

Edad x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	−3,75	14,0625
4	−1,75	3,0625
8	2,25	5,0625
9	3,25	10,5625
Suma	0	32,75

Tabla 5

6 Medidas de dispersión

Ejemplo 5

En la Tabla 6 se muestran, en la primera columna, las notas obtenidas por un estudiante; en la segunda, las desviaciones típicas respecto a la media ($\bar{x} = 6$), y en la tercera, los cuadrados de estas desviaciones.

Notas x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
4	$4 - 6 = -2$	$(-2)^2 = 4$
5	$5 - 6 = -1$	$(-1)^2 = 1$
6	$6 - 6 = 0$	$0^2 = 0$
7	$7 - 6 = 1$	$1^2 = 1$
8	$8 - 6 = 2$	$2^2 = 4$
Suma	0	10

Tabla 6

De acuerdo con la definición, la varianza es $s^2 = \frac{10}{5} = 2$ y la desviación típica de la distribución es: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Ten en cuenta

La desviación típica se mide en las mismas unidades que la variable.

Ejemplo 6

La Tabla 7 muestra los datos agrupados correspondientes al peso de 55 personas. Las columnas se han completado de tal forma que la información se use para calcular la varianza con la expresión $s^2 = \frac{f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + ... + f_nx_n^2}{f_1 + f_2 + ... + f_n} - \bar{x}^2$.

Peso (kg)	x_i	f_i	$x_i^2 \cdot f_i$
[60, 65)	62,5	7	27 343,75
[65, 70)	67,5	12	54 675
[70, 75)	72,5	16	84 100
[75, 80)	77,5	11	66 068,75
[80, 85)	82,5	5	34 031,25
[85, 90)	87,5	4	30 625
		55	296 843,75

Tabla 7

La media es $\bar{x} = 73{,}14$ kg.

La varianza y la desviación típica son, respectivamente:

$s^2 = \frac{296\,843{,}75}{55} - 73{,}14^2 = 47{,}7\ \text{kg}^2$ y

$s = \sqrt{47{,}7\ \text{kg}^2} = 6{,}91$ kg.



Actividad resuelta

Ejercitación

1 Halla la varianza y la desviación típica de la distribución de los pesos dados en la Tabla 8.

Solución:

Se completa la tabla calculando la columna $x_i^2 \cdot fi$.

Peso (kg)	Marca de clase (x_i)	f_i	Marca · frecuencia ($x_i \cdot f_i$)	$x_i^2 \cdot f_i$
[1,5; 2,0)	1,75	1	1,75	3,0625
[2,0; 2,5)	2,25	3	6,75	15,1875
[2,5; 3,0)	2,75	9	24,75	68,0625
[3,0; 3,5)	3,25	12	39	126,75
[3,5; 4,0)	3,75	6	22,5	84,375
[4,0; 4,5)	4,25	4	17	72,25
		Suma = 35	Suma = 111,75	369,6875

Tabla 8

$\bar{x} = \frac{111{,}75}{35} = 3{,}1929$ kg $\qquad s^2 = 0{,}368\ \text{kg}^2 \qquad s = \sqrt{0{,}368} = 0{,}6$ kg

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central , medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el rango de cada conjunto de datos.

a. 3, 4, 10, 23, 8, 0, 15, 16, 67, 69, 4

b. 28, 32, 25, 35, 28, 25, 30, 35, 29, 29, 25, 35, 35, 30, 28, 30, 30, 28

c. 125, 75, 130, 50, 130, 75, 75, 75, 100, 100, 135, 135, 135, 130, 50, 50, 75, 135

d. 9, 5, 13, 11, 4, 8, 12, 8, 8, 5, 4, 9, 10, 13, 11, 11, 5, 4, 9, 9, 9, 8, 9, 8

3 Calcula el rango de los datos agrupados en las tablas 8 y 9.

a.

Velocidad	Número de accidentes
[0, 25)	0
[25, 50)	1
[50, 75)	1
[75, 100)	2
[100, 125)	5
[125, 150)	26

Tabla 8

b.

Estatura	Número de personas
[150, 155)	4
[155, 160)	8
[160, 165)	12
[165, 170)	11
[170, 175)	6
[175, 180)	5
[180, 185)	3
[185, 190)	1

Tabla 9

4 Determina la varianza y la desviación típica de los datos que se encuentran en las tablas 10 a 12.

a.

Número de libros	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas	5	12	18	11	7	4	1

Tabla 10

b.

Edad (años)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)
Número de niños	8	8	5	3

Tabla 11

c.

Peso (kg)	[15, 17)	[17, 19)	[19, 21)
Número de niños	7	9	4

Tabla 12

Razonamiento

5 Determina cuál de los siguientes conjuntos de datos tiene mayor dispersión.

a. 2, 6, 3, 8, 10, 32, 15

b. 110, 112, 111, 113, 111, 110, 111

c. 2,5; 2,5; 2,5; 3,5; 3,5

6 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. El rango de un conjunto de datos puede ser negativo. ( )

b. La desviación típica de un conjunto de datos puede ser 0. ( )

c. La varianza siempre es menor que la desviación típica. ( )

d. Dos conjuntos con igual rango tienen igual dispersión. ( )

Ejercitación

7 Halla la desviación media de cada grupo.

Grupo *A*:	72	65	71	56	59	63	61	70	52	49
Grupo *B*:	50	93	90	70	69	68	72	71	70	71

¿Qué conclusión puedes sacar a la vista de los resultados obtenidos?

Resolución de problemas

8 Un grupo de dieciséis estudiantes midieron sus estaturas y las consignaron así:

165	167	162	175	171	169	172	170
169	171	172	175	169	170	172	166

Faltaba por llegar Luis, que mide 196 centímetros.

a. ¿Se altera el valor del rango?

b. Si Luis hubiese medido 174 centímetros, ¿se habría alterado el valor del rango?

9 Los jugadores de dos equipos de fútbol se pesaron. Los datos, en kilogramos, se muestran a continuación.

Equipo *A*:	72,	65,	71,	56,	59,	63,	61,	70
Equipo *B*:	61,	82,	84,	73,	77,	70,	69,	68

a. Calcula el recorrido de cada equipo.

b. Calcula la media en cada equipo.

c. Calcula la desviación media para cada equipo.

d. ¿Qué equipo tiene los datos más dispersos?

Practica Más

Variables, datos y frecuencias

Comunicación

1. Indica, en cada caso, el tipo de carácter que se quiere estudiar. Luego, escribe algunos valores que puede tomar la variable estadística.

a. Tipo de sangre.

b. Tiempo diario empleado en ver televisión.

c. Calificación de un examen.

d. Color de ojos.

Datos agrupados

Ejercitación

2. Completa la Tabla 1 con los datos sobre el número de horas que utilizan Internet a diario 40 personas y responde las preguntas.

0 5 6 9 8 7 2 10 5 1 2 4 8 9 6 5 12 4 9 7

4 5 6 2 9 10 7 8 6 5 2 2 3 6 4 5 1 9 8 10

Tiempo (h)	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 3)				
[3, 6)				
[6, 9)				
[9, 12)				

Tabla 1

a. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

b. ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas utiliza Internet menos de seis horas diarias?

Gráficos estadísticos

Comunicación

3. Identifica el tipo de gráfica estadística adecuada para cada caso. Explica.

a. Hora de llegada de aviones al aeropuerto.

b. Marca de automóvil usado.

c. Tiempo de espera para ser atendido en un hospital.

Resolución de problemas

4. En la Tabla 2 se registra el área de 50 terrenos disponibles para siembra.

Área (m^2)	[6, 12)	[12, 18)	[18, 24)	[24, 30)	[30, 36)
Número de terrenos	4	8	14	18	6

Tabla 2

a. Halla la marca de clase y las frecuencias.

b. Representa la información en un histograma y en un polígono de frecuencias.

Media aritmética, mediana y moda

Ejercitación

5. Halla la media, la mediana y la moda de cada conjunto de datos de las siguientes tablas.

a.

Horas	Personas
[0, 2)	5
[2, 4)	8
[4, 6)	4
[6, 8)	10

Tabla 3

b.

Peso	Personas
[0, 15)	4
[15, 30)	8
[30, 45)	9
[45, 60)	5

Tabla 4

c.

Horas	Personas
[0, 4)	11
[4, 8)	15
[8, 12)	6
[12, 16)	9

Tabla 5

d.

Peso	Personas
[0, 5)	6
[5, 10)	9
[10, 15)	10
[15, 20)	7

Tabla 6

Razonamiento

6. Determina la media, la mediana y la moda de los datos representados en las figuras 1 y 2.

a.

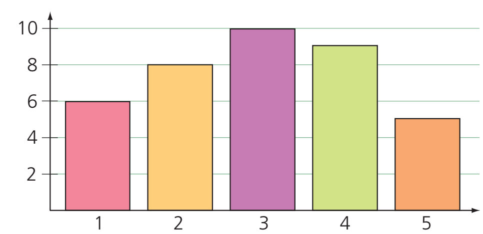


Figura 1

b.

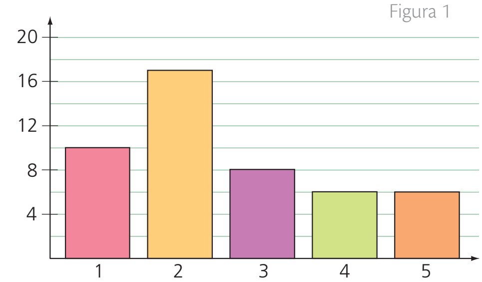


Figura 2

Medidas de dispersión

Resolución de problemas

7. El largo, en centímetros, de seis cubiertos de plástico producidos en dos máquinas diferentes son los siguientes.

Máquina A: 12,1 12 12,2 11,9 11,9 12

Máquina B: 12,2 12,3 11,8 12 11,7 12

¿Cuál de las máquinas debe utilizar una empresa que desea fabricar cubiertos con la menor variabilidad en los tamaños?

Resolución de Problemas

Estrategia: Utilizar datos de una gráfica

Problema

En el histograma de la Figura 1 se representa el tiempo, en minutos, que tardan los empleados de una fábrica en desplazarse de su casa al trabajo por la mañana.

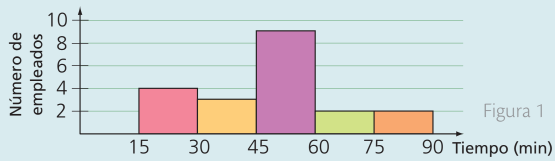


Figura 1

¿Cuál es el promedio y la moda de este grupo de datos?

1. Comprende el problema

- ¿Cuántos empleados tiene la fábrica?
  R: Tiene 20 empleados.
- ¿En cuántos intervalos se agruparon los datos?
  R: En cinco intervalos diferentes.

2. Crea un plan

- Interpreta la información que se presenta en el histograma, organiza los datos en una tabla y halla el promedio y la moda.

3. Ejecuta el plan

- Determina la frecuencia y la marca de clase de cada intervalo. Luego, multiplica las marcas de clase por sus respectivas frecuencias absolutas.

Tiempo (Minutos)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[15, 30)	22,5	4	22,5 · 4 = 90
[30, 45)	37,5	3	37,5 · 3 = 112,5
[45, 60)	52,5	9	52,5 · 9 = 472,5
[60, 75)	67,5	2	67,5 · 2 = 135
[75, 90)	82,5	2	82,5 · 2 = 165

- Halla el tiempo promedio.

$$\overline{x} = \frac{90 + 112{,}5 + 472{,}5 + 135 + 165}{20} = \frac{975}{20} = 48{,}75$$

- Identifica la clase modal.

  En el histograma se observa que la clase en la que se registra la mayor frecuencia es [45, 60).

R: El promedio es 48,75 minutos y la moda es la marca de clase del intervalo modal, es decir, 52,5.

4. Comprueba la respuesta

- Halla la mediana y comprueba que su valor es mayor que el promedio.

Aplica la estrategia

1. En la Figura 2 se representa la edad de un grupo de estudiantes de grado séptimo.

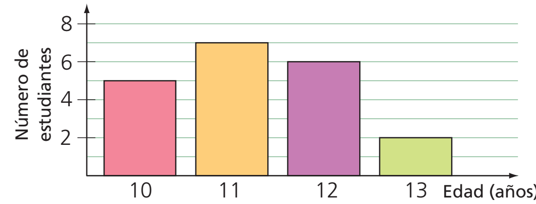


Figura 2

¿Cuál es la edad promedio del grupo, la moda y la mediana?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Dos estudiantes han obtenido las siguientes valoraciones en la asignatura de matemáticas.
Pedro: 75, 76, 85, 93 y 65
José: 65, 67, 85, 65 y 93
¿Cuál de los dos tiene mejor promedio?

3. Se realiza una encuesta a 20 estudiantes sobre su color preferido. Estos son los datos que se recogieron.

Azul	Rojo	Blanco	Amarillo	Rojo
Rojo	Azul	Azul	Rojo	Azul
Blanco	Rojo	Rojo	Azul	Azul
Amarillo	Rojo	Blanco	Amarillo	Amarillo

Organiza los datos en una tabla frecuencias y encuentra la moda.

4. Un estudiante sacó estas notas en matemáticas.

75, 60, 85, 65, 80

¿Al estudiante le conviene más calcular su nota definitiva empleando la mediana o el promedio?

Formula problemas

5. Inventa y resuelve un problema que involucre los siguientes grupos de datos:
Grupo A: 450, 460, 380, 430, 420
Grupo B: 430, 450, 460, 370, 410

7 Experimentos aleatorios. Sucesos

Explora

El Mundial de Fútbol es un campeonato en el cual participan 32 selecciones nacionales masculinas.



- ¿Se puede determinar con anticipación el nombre del equipo ganador de este campeonato?

7.1 Experimentos aleatorios

A pesar de que algunas selecciones llegan como favoritas al Mundial de Fútbol, no se puede predecir con certeza cuál de las 32 será la campeona hasta que no se jueguen todos los partidos del campeonato.

Cuando no se puede saber el resultado de un experimento, aunque se repita muchas veces, se le llama **experimento aleatorio**. Por el contrario, cuando se sabe de antemano el resultado de un experimento, se le llama **determinista**.

Ejemplo 1

Observa algunos tipos de experimentos en la Tabla 1.

Experimentos	
Aleatorios	**Deterministas**
Obtener un número par al lanzar un dado.	Crear color verde, mezclando amarillo con azul.
Ganar la lotería.	Sumar 2 con 3 y obtener 5.
Escoger un representante del curso de los 30 estudiantes de grado séptimo.	Congelar el agua a una temperatura bajo cero.

Tabla 1

7.2 Espacio muestral

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se denota con la letra E.

Ejemplo 2

El espacio muestral correspondiente a los equipos que participaron en el Mundial Brasil 2014 se muestra en la Figura 1.



Figura 1

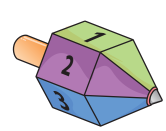
Ejemplo 3

Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

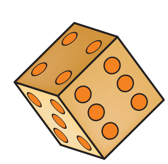
a. Lanzar una moneda.



b. Girar una perinola.



c. Lanzar un dado.



d. Extraer una carta de la baraja española.



a. Hay dos posibles resultados: $E = \{$cara, sello$\}$.

b. $E = \{$toma 1, toma 2, toma todo, pon 1, pon 2, todos ponen$\}$

c. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

d. Hay 52 resultados posibles: $E = \{$todas las cartas de la baraja$\}$

Ten en cuenta

La mayoría de experimentos aleatorios se presentan en juegos, concursos y eventos naturales, entre otros.

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

7.3 Sucesos aleatorios

A los subconjuntos de un espacio muestral se les llama **sucesos** o **eventos**. Se representan con letras mayúsculas y se designan escribiendo entre llaves los posibles resultados que pueden darse.

Ejemplo 4

Para el evento "sacar el nombre de un país de una urna que contiene el nombre de los países que participaron en el Mundial de Brasil 2014", se pueden considerar estos sucesos:

a. A: "sacar el nombre de un equipo suramericano"
$A = \{$Brasil, Argentina, Colombia, Chile, Uruguay, Ecuador$\}$

b. B: "sacar el nombre de un equipo europeo"
$B = \{$España, Alemania, Bélgica, Suiza, Holanda, Italia, Inglaterra, Portugal, Grecia, Bosnia, Croacia, Rusia, Francia$\}$

Ten en cuenta

Aunque parezca increíble, si una pareja quiere tener cuatro hijos es mucho más probable que tengan tres hijos de un sexo y uno del otro que cualquier otra posibilidad.



Ejemplo 5

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por ejemplo, algunos sucesos de E son:

Salir un número par: $P = \{2, 4, 6\}$

Salir un número impar: $I = \{1, 3, 5\}$

Salir un número múltiplo de 3: $M = \{3, 6\}$

Salir un número múltiplo de 5: $N = \{5\}$

Estos sucesos son aleatorios.



7.4 Tipos de sucesos

- **Suceso elemental:** es el formado por un solo resultado.
- **Suceso compuesto:** es el formado por más de un resultado.
- **Suceso seguro:** es el que ocurre siempre en un determinado experimento.
- **Suceso imposible:** es el que nunca ocurre en un determinado experimento.

Ten en cuenta

Los sucesos seguros se designan por E y los imposibles con $\varnothing$.

Ejemplo 6

En el Mundial de Fútbol del 2018 se pueden presentar diferentes tipos de sucesos, como se muestra en la Tabla 2.

Tipo de suceso	El ganador del Mundial será...
Elemental	El que ha ganado más copas mundiales. $A = \{$Brasil$\}$
Compuesto	El que ya ha sido campeón mundial. $B = \{$Brasil, Alemania, Italia, Argentina, España, Inglaterra, Francia, Uruguay$\}$
Seguro	Uno de los equipos clasificados para el Mundial de Fútbol 2018.
Imposible	Un equipo no clasificado para el Mundial de Fútbol 2018. $C = \varnothing$

Tabla 2

7.5 Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios

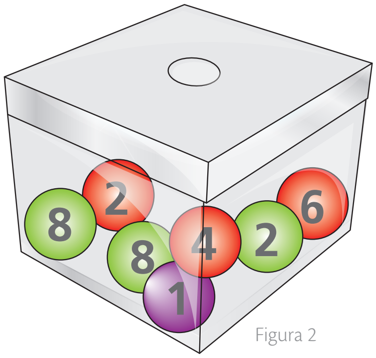


Figura 2

Dos **sucesos** son **compatibles** si tienen al menos un suceso elemental en común.
Dos **sucesos** son **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental en común.

Ejemplo 7

Si se extrae al azar una bola de la urna de la Figura 2, es posible determinar los siguientes sucesos:

H: "sacar una bola con el número 8"

G: "sacar una bola de color verde"

Estos dos sucesos son compatibles porque pueden verificarse al mismo tiempo: se puede extraer una bola de color verde que tenga el número 8.

Por su parte, los sucesos P: "sacar una bola roja" y Q: "sacar una bola con un número impar" son incompatibles, porque cualquier bola que se extraiga de esa urna no puede ser roja y tener un número impar al mismo tiempo.

Ten en cuenta

El contrario del suceso seguro (el espacio muestral) es el suceso imposible (el conjunto vacío) y viceversa.

Se llama **suceso contrario** de A al suceso que ocurre siempre que no ocurra A y se expresa de la forma $\overline{A}$. Los sucesos contrarios también se llaman **complementarios**.

Ejemplo 8

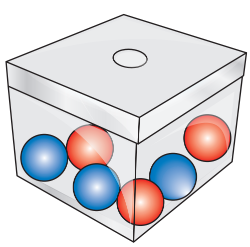
En el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6, el suceso contrario a A: "salir número par" $= \{2, 4, 6\}$ es el suceso $\overline{A}$: "salir número impar" $= \{1, 3, 5\}$.

Observa que si se verifica el suceso A no se verifica el suceso contrario $\overline{A}$ y viceversa.

7.6 Sucesos equiprobables

Los **sucesos equiprobables** son aquellos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 9


Figura 3

En la Figura 3 se muestra una urna con tantas bolas rojas como azules. Los sucesos A: "sacar una bola roja" y B: "sacar una bola azul" son equiprobables, ya que es igual de probable extraer una bola roja o una bola azul de la urna.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos, indica algunos sucesos y escribe el suceso contrario.

a. Lanzar una moneda **b.** Lanzar un dado especial (Figura 4)

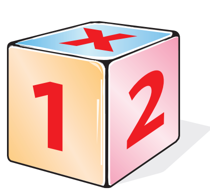


Figura 4

Solución:

En la Tabla 3 se indican los sucesos y sus contrarios.

Experimento	Espacio muestral	Algunos sucesos	Sucesos contrarios
Lanzar una moneda	$E = \{cara, sello\}$	$A = \{cara\}$ $B = \{sello\}$	$\overline{A} = \{sello\}$ $\overline{B} = \{cara\}$
Lanzar un dado especial	$E = \{1, X, 2\}$	$A = \{1\}$ $B = \{X, 2\}$ $C = \{1, X\}$ $D = \{X\}$	$\overline{A} = \{2, X\}$ $\overline{B} = \{1\}$ $\overline{C} = \{2\}$ $\overline{D} = \{1, 2\}$

Tabla 3

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe tres ejemplos de experimentos aleatorios y tres de experimentos deterministas.

3 Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, escribe el espacio muestral.

- **a.** Sacar sin mirar un yogur de una nevera en la que hay yogures de cuatro sabores: fresa, limón, natural y mora.
- **b.** Girar una ruleta que tiene los números del 1 al 10.
- **c.** Contar el número de personas que suben a un bus en una estación.
- **d.** Aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo.
- **e.** Saber el ganador de la próxima Liga de Campeones.

4 Considera el experimento "extraer un papel de una bolsa en la que hay 100 papeles numerados del 00 al 99". Escribe tres sucesos de cada categoría mencionada.

a. elementales **b.** compuestos **c.** imposibles

Ejercitación

5 Forma el espacio muestral de los experimentos aleatorios que se describen a continuación.

- **a.** Se lanza una moneda y se espera que caiga cara.
- **b.** Se lanza un dado y se anota el resultado de su cara superior.
- **c.** Se extrae, sin mirar, una bola de una urna en la que hay doce balotas numeradas del 1 al 12.
- **d.** Se lanzan dos dados y se anota el resultado de la suma de sus caras superiores.

6 Considera el experimento aleatorio "sacar una bola de una urna en la que hay nueve bolas numeradas del 1 al 9" y encuentra lo siguiente.

- **a.** El espacio muestral.
- **b.** El suceso *A*: "sacar un número par"
- **c.** El suceso *B*: "sacar un número mayor que 3"

Razonamiento

7 Establece los diferentes tipos de sucesos para cada experimento.

- **a.** Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.
- **b.** Se lanza un dado y se anota el resultado de la cara superior.

Ejercitación

8 Observa las ruletas de las Figuras 5 a 8. ¿En cuál de ellas es igual de probable obtener verde que amarillo?

a.

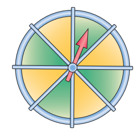


Figura 5

b.

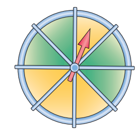


Figura 6

c.

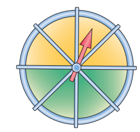


Figura7

d.

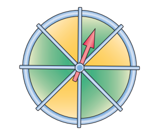


Figura 8

Razonamiento

9 Enuncia los sucesos contrarios a los sucesos indicados en cada caso, si se sabe que una bolsa contiene una bola roja, una azul y una negra.

A: "sacar la bola roja"
B: "sacar la bola azul"
C: "sacar la bola negra"

10 Supón que tienes una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9 y realizas el experimento de sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Considera los sucesos: A = "salir un número primo" y B = "salir un número cuadrado".

- **a.** Escribe el espacio muestral de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
- **b.** ¿Son *A* y *B* sucesos compatibles o incompatibles? Explica.
- **c.** Encuentra los sucesos contrarios a *A* y *B*.

Resolución de problemas

11 Javier tiene una bolsa con pinturas de color anaranjado, amarillo y rosado. Sin mirar, saca dos pinturas para dárselas a Susana.

- **a.** Escribe el espacio muestral.
- **b.** Propón dos sucesos compatibles.
- **c.** Escribe dos sucesos incompatibles.

12 Describe un experimento aleatorio y, a partir de este, determina lo siguiente.

- **a.** El espacio muestral.
- **b.** Dos sucesos elementales.
- **c.** Dos sucesos compuestos.
- **e.** Dos sucesos compatibles.
- **f.** Dos sucesos incompatibles.
- **g.** Dos sucesos equiprobables.
- **h.** Dos sucesos seguros.
- **i.** Dos sucesos imposibles.

8 Probabilidad

Explora

Para participar en una rifa en la que juegan cien números, la familia Ramírez compró tres boletos, la familia Suárez compró quince boletos y la familia Pérez compró nueve boletos.



- ¿Cuál familia tiene mayor probabilidad de ganar? ¿Cuál tiene menor probabilidad de ganar?

La familia que adquirió la mayor cantidad de boletos es la que tiene mayor probabilidad de ganar; en este caso, es la familia Suárez porque compró quince boletos. De otro lado, la familia Ramírez tiene menos probabilidad de ganar, pues adquirió menos boletos que las otras dos familias.

La **probabilidad de un suceso** indica las posibilidades que tiene de ser verificado un experimento aleatorio.

8.1 Asignación de probabilidades. Regla de Laplace

En 1812, el matemático francés Pierre Simón, marqués de Laplace, dio la primera definición de probabilidad. Esta es:

Regla de Laplace. Si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se verifica la probabilidad de un suceso así:

$$\text{Probabilidad del suceso } A = P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo 1

Para determinar la probabilidad de que cada familia mencionada gane la rifa, se halla el cociente entre la cantidad de boletos compradas por cada familia y el total de boletos de la rifa.

Familia Ramírez	Familia Suárez	Familia Pérez
$\frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$	$\frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\%$	$\frac{9}{100} = 0{,}09 = 9\%$

Tabla 1

Ejemplo 2

En un salón de clases hay 18 niñas y 22 niños. Si se realiza una rifa, la probabilidad de que gane una niña es:

$$\frac{18}{40} = 0{,}45 = 45\%$$

Ejemplo 3

Para el viaje de fin de curso, los estudiantes organizaron una tómbola con 500 papeletas numeradas del 1 al 500. Juan compró una papeleta y Marta, cuatro. ¿Qué oportunidades de ganar tiene cada uno?

Como todos los números son equiprobables y Juan tiene una papeleta de las 500 vendidas, entonces se dirá que tiene una oportunidad entre 500 o que la probabilidad de que Juan gane viene dada por la fracción $\frac{1}{500}$. Como Marta tiene cuatro papeletas, tendrá cuatro oportunidades entre 500 de ganar; o sea que la probabilidad de que gane Marta viene dada por la fracción $\frac{4}{500}$.

Ejemplo 4

En una bolsa se depositan diez tarjetas numeradas del 0 al 9. Si se extrae una tarjeta al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. *A*: "salir 3" **b.** *B*: "salir múltiplo de 4"

c. *C*: "salir 13" **d.** *D*: "salir número compuesto"

a. $\frac{1}{10}$ b. $\frac{1}{5}$ c. $\frac{0}{10} = 0$ d. $\frac{2}{5}$

Ten en cuenta



Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827).

Fue un Astrónomo, físico y matemático francés que enunció la primera definición de probabilidad.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.

8.2 Escala de probabilidades

La **probabilidad de que un suceso** ocurra se mide con un número comprendido entre 0 y 1.

Ejemplo 5

Al lanzar una moneda al aire, se pueden establecer los sucesos que se muestran en la Tabla 2, junto con su respectiva probabilidad.

Suceso		Tipo de suceso	Probabilidad
Caer cara o sello	$A = \{C, S\}$	Seguro	$\frac{2}{2} = 1 = 100\%$
Caer sello	$A = \{S\}$	Elemental	$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
Caer cara	$A = \{C\}$	Elemental	$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
No caer ni cara ni sello	$\varnothing$	Imposible	$\frac{0}{2} = 0 = 0\%$

Tabla 2

Ejemplo 6

Si se extrae sin mirar una bola de las siguientes bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

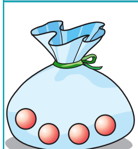
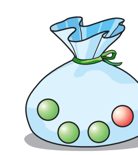
Bolsa *A*	Bolsa *B*	Bolsa *C*	Bolsa *D*	Bolsa *E*
				
Es imposible extraer una bola verde. Hay cero oportunidades entre cuatro.	Hay una oportunidad entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay dos oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay tres oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Es seguro extraer una bola verde. Hay cuatro oportunidades entre cuatro.
$P(\text{verde}) = \frac{0}{4} = 0$	$P(\text{verde}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$P(\text{verde}) = \frac{2}{4} = 0{,}5$	$P(\text{verde}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$P(\text{verde}) = \frac{4}{4} = 1$

Tabla 3

8.3 Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad del suceso imposible es 0.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.
- La probabilidad del suceso contrario a A es $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula la probabilidad del suceso "sacar una bola de color rojo" de la urna de la Figura 1 y la probabilidad del suceso contrario.

Solución:

Como en la urna hay 20 bolas, la probabilidad de sacar una bola roja es:

$$P(A) = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

Por lo tanto: $P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{20} = \frac{6}{20} = 0{,}3.$

Entonces, la probabilidad de sacar una bola verde es 0,3.

Cálculo mental

Pasar un decimal a porcentaje

Para expresar un número decimal como un porcentaje, se multiplica el número por 100. Por ejemplo, el número 0,34 equivale al 34% porque $0{,}34 \cdot 100 = 34\%$.

- Escribe como porcentaje los números 0,25 y 0,7.

Ten en cuenta

De la igualdad

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

se obtiene la igualdad

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

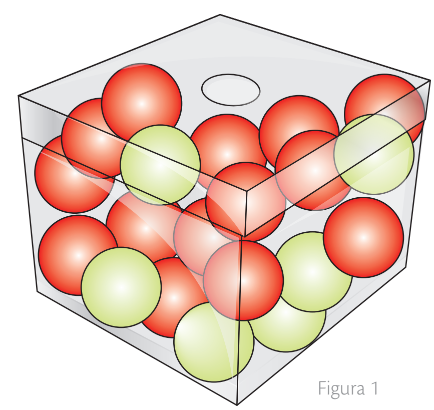


Figura 1

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/actividad_1_probabilidades.html

Aprende más sobre espacio muestral y probabilidad.

8 Probabilidad

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla la probabilidad de cada suceso, si el experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

a. *A*: "salir par"

b. *B*: "salir impar"

c. *C*: "salir múltiplo de 3"

d. *D*: "salir múltiplo de 5"

e. *E*: "salir número primo"

3 Calcula la probabilidad de cada suceso, si el experimento consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene cinco bolas rojas, tres azules y una amarilla.

a. Que sea roja. **b.** Que sea azul.

c. Que sea amarilla. **d.** Que no sea roja.

e. Que no sea amarilla. **f.** Que no sea azul.

4 Lee y resuelve.

Se escoge al azar un dulce de una caja donde hay diez de menta, seis de fresa y cinco de caramelo. Halla las siguientes probabilidades.

a. Que sea de menta. **b.** Que sea de caramelo.

c. Que no sea de menta. **d.** Que no sea de fresa.

5 Analiza y resuelve.

Se lanza un dado que tiene dos caras con el número 1, dos caras con el número 2 y dos caras con el número 3. Halla la probabilidad de que al lanzarlo, la cara superior muestre las siguientes opciones.

a. El número 1. **b.** El número 2.

c. El número 3. **d.** El número 6.

Razonamiento

6 Halla la probabilidad del evento que se indica en cada caso, si el experimento consiste en extraer de forma aleatoria una bola identificada con algún número entre 1 y 9.

a. Que la bola tenga el número 5.

b. Que la bola muestre un número menor que 4.

c. Que la bola esté identificada con un número mayor que 6.

d. Que la bola muestre un número mayor que 2 pero menor que 6.

7 Resuelve.

Lucía escribe cada uno de estos números en un papel. Después los dobla y selecciona uno de ellos al azar.

1 2 2 3 3 4 5 8 8 9

Calcula la probabilidad de que el papel que elija Lucía muestre el número o números que cumplan cada condición.

a. El 5. **b.** Mayor que 4.

c. Divisible entre 3. **d.** Múltiplo de 4.

e. Par. **f.** Menor que 6.

g. Menor o igual que 6. **h.** Mayor que 9.

8 Lee y resuelve.

Óscar le pide a Alberto que elija un número cualquiera del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}.

a. Escribe los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

A: "elegir un número mayor que 3"

B: "elegir un número par"

C: "elegir un número distinto de 7"

b. Escribe los elementos de los sucesos contrarios. Calcula sus probabilidades.

c. ¿Hay algún suceso imposible? ¿Hay algún suceso seguro?

9 Calcula la probabilidad de sacar al azar una carta con la figura que se indica en cada caso, sabiendo que se toma de una baraja española que consta de 40 cartas.

a. Una copa.

b. Una sota.

c. La sota de copas.



10 Halla lo que se pide en cada caso, si se efectúa un experimento que consiste en lanzar dos dados cúbicos y cada una de sus caras muestra un número entre 1 y 6.

a. El espacio muestral.

b. Un suceso seguro y su probabilidad.

c. Tres sucesos equiprobables.

d. Tres sucesos compuestos y la probabilidad de cada uno.

e. Un suceso imposible y su probabilidad.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.

Resolución de problemas

11 Una fábrica de bombillas tiene dos máquinas. La máquina *A* produce cuatro bombillas defectuosas por cada 250 bombillas fabricadas. El número de bombillas defectuosas que produce la máquina *B* es de seis por cada 400 fabricadas.

Nubia tiene una bombilla que funciona. ¿Con cuál máquina es más probable que se haya fabricado?

12 Una pareja espera mellizos. Calcula las probabilidades de todos los sucesos relativos al sexo de los recién nacidos.



13 Tres atletas, *A*, *B*, y *C*, participan en una carrera. Considerando que no llegan a la meta al mismo tiempo, halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Que gane *A*.
b. Que *C* llegue de último.
c. Que gane *A* o *B*
d. Que gane *C*.

14 La probabilidad de que un estudiante cualquiera llegue tarde a clase es $\frac{1}{15}$. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue temprano?

15 Juan y Pilar juegan con unos dados cúbicos especiales: sus caras están numeradas con los seis primeros números primos.



a. Escribe todos los resultados que pueden obtener si lanzan los dos dados. Calcula el producto de las puntuaciones de cada uno.

b. Analiza el juego que propone Juan y explica de forma razonada por qué Pilar no acepta las condiciones.

16 Una baraja de 52 cartas está compuesta por trece cartas de corazones rojos, trece cartas de diamantes rojos, trece cartas de tréboles negros y trece cartas de picas negras. De las trece cartas de cada grupo una es as, nueve están numeradas del 2 al 10 y las restantes son las letras J, Q y K. Se mezclan muy bien y se saca una carta. Calcula lo siguiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta roja?

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una letra?

c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número?

d. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un siete negro?

e. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?

f. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par rojo?

g. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

h. Menciona un suceso seguro.

i. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario a sacar un as?

17 Calcula la probabilidad de las siguientes situaciones.

a. Descubrir un número mayor que 10 pero menor que 50, cuyas cifras sean todas diferentes.

b. Adivinar un número de cuatro cifras si lo único que sabes es que tiene seis unidades de mil.

18 Jorge debe hacer una exposición sobre el cosmos y puede escoger al azar dos elementos entre dos grupos diferentes. El primer grupo tiene como opciones planetas y satélites y el segundo tiene como opciones nebulosas, estrellas y asteroides.



¿Cuál es la probabilidad de que Jorge exponga sobre estrellas y satélites? Como pista puedes llenar la Tabla 4.

	Planetas	Satélites
Nebulosas		
Estrellas		
Asteroides		

Tabla 4

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. De las siguientes variables, es discreta:

A. suma de los dígitos de la placa de un automóvil

B. centímetros de lluvia en Quito durante un mes

C. velocidad de un auto en un instante cualquiera

D. temperatura en Guayaquil a las 13h30

2. De las siguientes variables, es continua:

A. vida media de un foco

B. número de ventanas de un edificio

C. diámetro de una esfera

D. número de hijos de 20 familias del norte de Quito

3. El cociente entre la frecuencia absoluta de un dato y el número total de datos toma el nombre de:

A. frecuencia absoluta

B. frecuencia relativa

C. frecuencia discreta

D. frecuencia acumulada

4. La media aritmética de los siguientes valores es:

16 23 12 8 7 13 5

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

5. El número de hamburguesas vendidas en un restaurante en 6 días han sido de 84, 91, 72, 68, 87 y 78. La mediana de las ventas de los seis días es:

A. 140

B. 89

C. 81

D. 70

6. En la tabla se muestran las edades de las personas que usan el parque de un barrio. Para estos datos indica el valor de la clase modal

Edad	f_i	F_i
[5,10)	22	22
[10,15)	45	67
[15,20)	20	87
[20,25)	13	100
[25,30)	8	108

A. 45,0

B. 22,5

C. 17,5

D. 12,5

7. Si la media aritmética de los valores: 5, 7, x, 11, 7, 6, 5, 2, que se proponen es 7, entonces x corresponde a:

A. 7

B. 9

C. 13

D. 17

8. Para los valores: 21, 14, 32, 12, 15, 18: el valor de la mediana es:

A. 16,5

B. 17,5

C. 18,0

D. 23,0

9. Un puesto de comida rápida recibe 20 clientes los lunes, 22 clientes los martes, 34 los miércoles, 28 los jueves y 41 los viernes. El promedio de clientes que recibe en 3 semanas laborables es de:

A. 86

B. 87

C. 88

D. 89

10. Las medidas de dispersión miden:

A. la frecuencia de repetición de los datos

B. la posición central de los datos

C. el tamaño de los datos

D. la separación de los datos

Indicadores de logro:

- Identifica variables estadísticas.
- Calcula la media aritmética y la mediana, de un grupo de datos estadísticos.
- Calcula el rango, la varianza, la desviación media y típica de un grupo de datos estadísticos.

11. De los datos que constan en la tabla, el valor del rango es:

Edad	f_i
[5,10)	3
[10,15)	4
[15,20)	8
[20,25)	6
[25,30)	3

A. 5

B. 8

C. 15

D. 30

12. La desviación del ingreso del tercer mes es:

Meses	Ingresos
enero	356
febrero	400
marzo	483
abril	469
mayo	530

A. –35,4

B. 35,4

C. 42,2

D. –42,2

13. Los salarios de 5 personas que trabajan en una farmacia son: $ 580, $ 595, $ 498, $ 530 y $ 550. La desviación media de los salarios de las 5 personas es:

A. 20,6

B. 28,4

C. 29,5

D. 44,4

14. Las estaturas de 4 amigos son: 178 cm, 180 cm, 168 cm, 174 cm. La varianza de las estaturas es:

A. 21

B. 16

C. 12

D. 4

15. Las notas de Andrés son: 9, 5, 7, 8, 4, 9. La desviación típica de sus notas es:

A. 1,91

B. 1,34

C. 1,56

D. 1,55

16. Cuando no se puede saber el resultado de un experimento, este toma el nombre de:

A. cualitativo

B. determinista

C. absoluto

D. aleatorio

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Los recursos y el futuro

Recursos económicos

Son los bienes y servicios disponibles para las personas (o las empresas), que se utilizan para producir productos y/o beneficios para estas.

Los recursos económicos son: la tierra, el trabajo y el capital. Actualmente, la iniciativa empresarial también se considera como un recurso económico, pues los individuos son responsables de la creación de empresas y de la movilización de los recursos económicos en el entorno empresarial.

Estos recursos económicos son también conocidos como factores de producción y, sin duda, el recurso fundamental de la mayoría de las personas es el dinero.

1 La tierra

Es el recurso económico que abarca los recursos naturales que se encuentran dentro de la economía de una nación. Este recurso incluye la madera, el suelo, la pesca, las granjas y otros recursos naturales similares.



2 El capital

Tiene dos definiciones económicas: la primera, como factor de producción que puede representar los recursos monetarios, es decir, el dinero; la segunda, como el mayor activo físico (edificios, maquinaria, vehículos y otros artículos similares) que los individuos y las empresas utilizan cuando producen bienes o servicios.

3 El trabajo

Está representado en el capital humano disponible para transformar los recursos en bienes de consumo. El capital humano incluye a todos los individuos capaces de trabajar en la economía de la nación y de prestar diversos servicios a otras personas o empresas.

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1. Lee el siguiente texto:

> Un objetivo es el fin que se pretende alcanzar o la meta que se quiere lograr. Está compuesto por submetas y es el resultado final del cumplimiento de dichas acciones.

2. Fija un objetivo para este mes; puede ser escolar, deportivo o personal. Luego, elabora un listado de las submetas que deberás cumplir para alcanzar este objetivo. Ten presente que lo que te propongas debe ser alcanzable y real.

3. Completa el siguiente cuadro según tu criterio:

Objetivo	Acciones
Bajar de peso.	
Tener un desempeño académico alto.	
Comprar un nuevo videojuego.	

Manejo de la economía y los recursos en la familia

Todas las personas tratan de satisfacer sus propios deseos por medio de la utilización de los recursos materiales o económicos que poseen; esta satisfacción de necesidades depende también del buen manejo de los recursos disponibles.

El manejo de recursos se refiere a las estrategias establecidas para que la utilización de los recursos sea racional, es decir, que se lleve a cabo bajo ciertas condiciones que impidan su extinción.

Al hablar de la economía familiar es necesario enfatizar en que el propósito de cada colombiano es poder brindarle a su familia, cada día, mayor calidad de vida.

En el manejo de los recursos resulta importante optimizar el presupuesto; esto permite hacer gastos adecuados del dinero y fijar metas que en un futuro pueden cumplirse. También es necesario involucrar a toda la familia en políticas de ahorro, menor consumo y otros aspectos que contribuyan a mejorar la economía del hogar.



Pregunta tipo Saber

Ramiro ha decidido ajustar su presupuesto para poder ahorrar y cambiar su automóvil.



Observa la tabla de los gastos en los que Ramiro podría ahorrar:

Gasto mensual	Valor
Alimentación	$ 350
Celular	$ 20
Diversión	$ 100
Servicios públicos	$ 105

Si la estrategia de Ramiro consiste en disminuir en un 15% los gastos de la tabla anterior, Ramiro podrá ahorrar esto:

A. $ 86,25 al mes, aproximadamente.

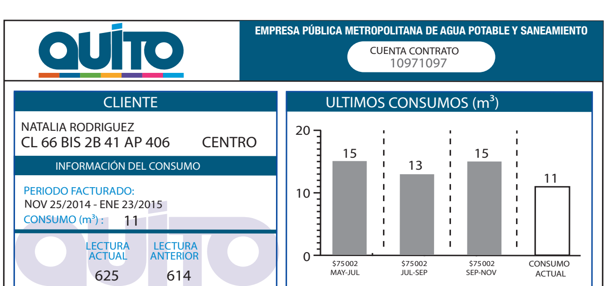
B. $ 52,5 en alimentación.

C. $ 18 entre celular y diversión.

D. $ 15,75 en servicios públicos.

Administración de recursos

4 Observa en la siguiente factura el consumo de m^3 de agua de una familia en los periodos comprendidos entre mayo y enero.



Trabajo en grupo

5 Consulten el costo del m^3 de agua en tu ciudad y calcula la diferencia del consumo, en metros cúbicos y en dinero, entre los cuatro periodos facturados.

6 Escriban una conclusión, a partir de la factura, en relación con el consumo y el ahorro de agua.

7 ¿Qué medidas pueden tomar en tu casa para ahorrar agua? ¿Para qué podría utilizar tu familia el dinero ahorrado en el servicio del agua?

Habilidades digitales

Elabora un documento en Google Drive y edítalo en grupo

Trabajar en la red con tus compañeros te permite desarrollar habilidades para generar y evaluar contenidos compartidos. En esta actividad aprenderás a crear un documento en Google y a compartirlo para que pueda ser editado en grupo.

1 Ingresa a la dirección www.gmail.com.

a. Si ya tienes correo con Gmail ingresa con tu usuario y contraseña.

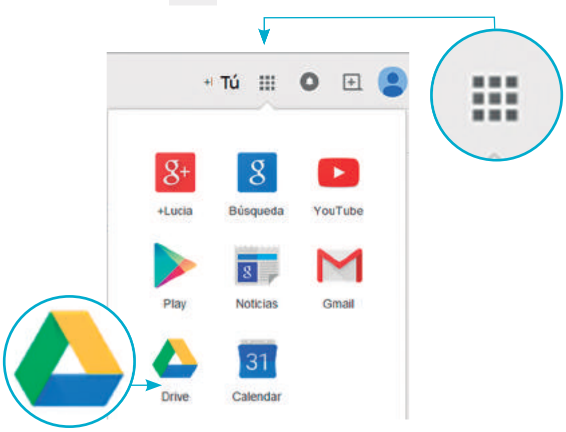
b. Si aún no tienes una cuenta con Gmail, haz clic en **Crear una cuenta** y diligencia los datos solicitados:

- Nombre
- Nombre de usuario
- Contraseña
- Confirmación de la contraseña
- Fecha de nacimiento
- Sexo
- Teléfono celular (si tienes)
- Correo actual (por ejemplo de Yahoo o de Outlook)
- Escribir el texto de la imagen
- Ubicación

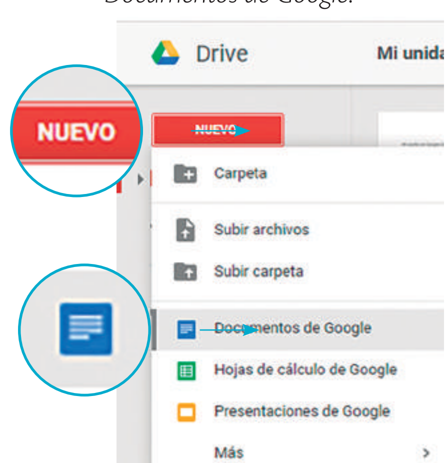


2 Ahora, desde tu correo, crearás un documento con la aplicación *Drive.*

a. Haz clic en el ícono ⠿ y selecciona la aplicación *Drive.*



b. Haz clic en *Nuevo* y elige la opción *Documentos de Google.*

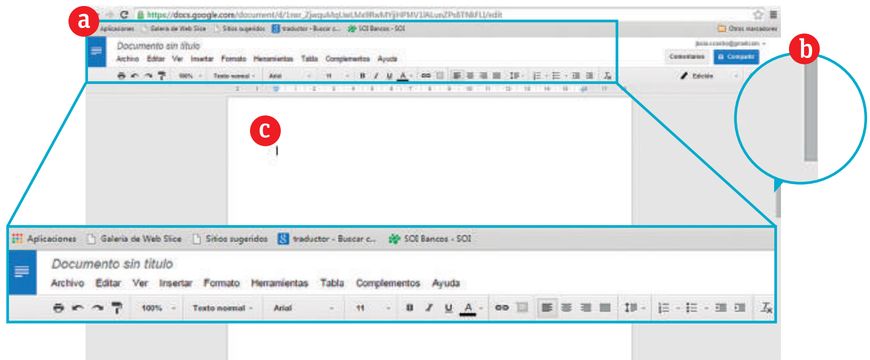


3 Conoce la interfaz de *Google Docs.*

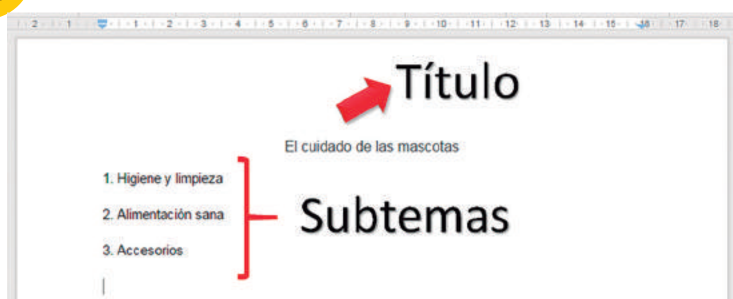
a. Barra de herramientas: allí encontrarás los menús de editar y formato, entre otros.

b. Barra de desplazamiento: con esta podrás moverte de forma vertical en el documento.

c. Zona de trabajo: lugar de escritura



4 Edita un documento sobre funciones trigonométricas en *Google Docs.*



a. Decidan en grupo la estructura que tendrá el documento.

b. Escribe un título llamativo y acorde al tema, y propón los subtítulos para cada una de las secciones.

c. Selecciona una parte del texto con el clic izquierdo sostenido y arrastrando el mouse; usa la barra de herramientas.

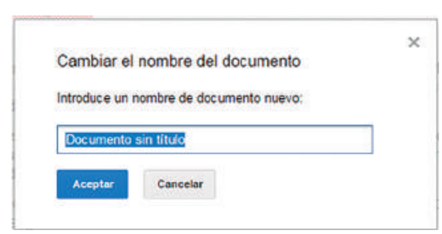
5 Asigna un nombre a tu documento y compártelo para que otros colaboren en su edición.

a. En la barra de herramientas haz clic en el texto *Documento sin título* .

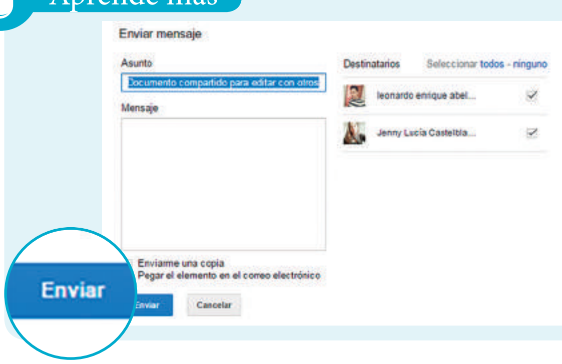
b. Escribe el título asignado y luego selecciona *Aceptar*.

c. Ahora haz clic en el botón **Compartir**.

d. Escribe los correos de los compañeros que crearán contigo el documento, elige la opción **Puede editar**. Por último, redacta una nota y haz clic en el botón *Enviar.* Ahora tus compañeros podrán tener acceso al documento y editarlo.



Aprende más



Notifica sobre los avances en la edición del documento a tus colaboradores.

a. Haz clic en el menú *Archivo* y elige la opción *Enviar correo electrónico a los colaboradores.*

b. Redacta el asunto y escribe el mensaje. Luego selecciona a los colaboradores a los que deseas notificar y envía tu mensaje.

Evaluación de la unidad

Variables, datos y frecuencias

Comunicación

1. Marca con una X la casilla que corresponda.

Variable	Cuantitativa discreta	Cuantitativa continua
Goles anotados en un campeonato.		
Edad de los empleados de una empresa.		
Peso de un grupo de personas.		
Número de hijos.		
Altura de los estudiantes de octavo EGB.		
Litros de agua contenidos en un depósito.		

Ejercitación

2. Completa la tabla de frecuencias con los siguientes datos sobre el número de hermanos de 30 estudiantes de octavo EGB.

0	0	0	1	3	4	4	3	1	2
2	2	2	3	3	3	3	4	1	1
1	1	1	0	2	3	4	3	3	0

Número de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada

3. Completa la tabla de frecuencias con los siguientes datos sobre el peso de 24 personas.

56	61	72	69	88	59	65	78
52	66	75	89	81	78	76	52
77	82	69	67	65	74	68	85

Peso	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i
[50, 60)						
[61, 70)						
[71, 80)						
[81, 90)						

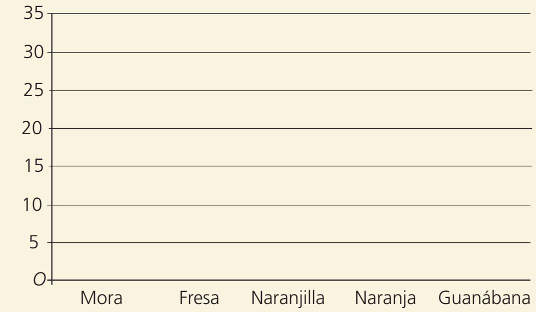
Gráficos estadísticos

Ejercitación

4. Elabora el diagrama de barras correspondiente a la información registrada en la tabla.

Jugo favorito	Frecuencia absoluta
Mora	24
Fresa	18
Naranjilla	32
Naranja	26
Guanábana	20



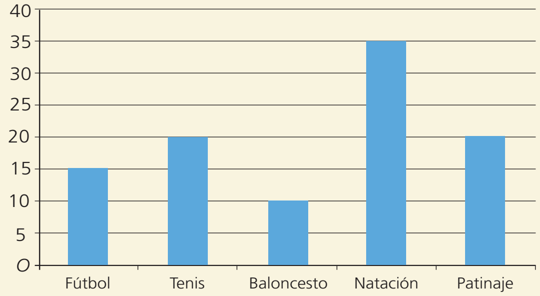


5. Representa mediante un diagrama circular la información de la tabla. Allí se muestra el color favorito de camiseta de 200 encuestados.

Color de camiseta	Frecuencia absoluta
Rojo	38
Verde	40
Azul	45
Blanco	57
Negro	20

Razonamiento

6. Observa el diagrama de barras.



a. Elabora en tu cuaderno la tabla de frecuencias correspondiente.

b. Escribe tres conclusiones sobre la información representada en el diagrama de barras.

Indicadores de logro:

- Calcula frecuencias absolutas, frecuencias relativas y frecuencias absolutas acumuladas de una serie de datos.
- Organiza datos en tablas de distribución de frecuencias para analizar el significado de los datos.
- Elabora e interpreta gráficos estadísticos.
- Calcula la media aritmética, mediana y moda de un conjunto de datos estadísticos.
- Calcula probabilidades simples con el uso de fracciones.

Media, mediana y moda

Resolución de problemas

7. Se preguntó a 40 estudiantes de una universidad por el número de personas con las que vive en su hogar actualmente. Los datos obtenidos son:

3	4	8	10	4	4	4	5
2	4	5	5	5	3	3	3
2	2	7	6	8	5	3	2
9	4	3	3	7	4	2	3
4	5	6	3	2	4	5	3

a. ¿La variable estudiada es cualitativa o cuantitativa?

b. ¿Con cuántas personas en promedio vive un estudiante?

c. Calcula la mediana y la moda del conjunto de datos.

8. El número de libros que han leído 25 personas en los últimos cinco años se expresa en la siguiente tabla de datos agrupados.

Libros leídos	Marca de clase	Frecuencia
[0, 3)	1,5	10
[4, 7)	5,5	6
[8, 11)	9,5	5
[12, 15)	13,5	3
[16, 19)	17,5	1

a. ¿Cuál es el promedio de libros leídos por las 25 personas encuestadas?

b. ¿Cuál es la clase modal?

c. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

d. Realiza en tu cuaderno el histograma para representar los datos.

Medidas de dispersión

Ejercitación

9. Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica del siguiente conjunto de datos.

4 7 2 4 1 6

Rango = ☐ Desviación media = ☐

Varianza = ☐ Desviación típica = ☐

Razonamiento

10. Determina cuál de los siguientes grupos de datos es más disperso. Explica tu respuesta.

a. 3, 7, 8, 1, 10, 15

b. 12, 18, 14, 13, 16

c. 104, 132, 130, 127, 105, 110

d. 10, 15, 12, 7, 8

Experimentos aleatorios

Razonamiento

11. Identifica cuáles de los experimentos son aleatorios y marca con una X la casilla que corresponda.

Experimento	Aleatorio	No aleatorio
Escoger 20 personas de una lista de 100.		
Crear una base de datos.		
Contar la cantidad de personas que entran a un centro comercial.		
Desarrollar 20 ejercicios de matemáticas.		
Lanzar dos monedas al aire.		

Probabilidad

Resolución de problemas

12. Una bolsa contiene cinco bolas negras, nueve bolas blancas y doce amarillas. De esta bolsa se extrae una bola sin mirar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla?



13. Cristian le preguntó al profesor de matemáticas lo siguiente: "¿Es más probable ganarse el bingo o una lotería de cuatro números?" ¿Cuál debe ser la respuesta del profesor? Explica tu respuesta.

14. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 al lanzar un par de dados? ¿Cuál es la de obtener 12?

6 Leyes de la lógica y funciones

BLOQUES

- Geometría y Medida
- Algebra y Funciones

La humanidad ha creado diversos modelos matemáticos con el propósito de comprender y describir fenómenos reales. Dichos modelos, utilizan caracteres alfanuméricos y distintos tipos de representación que permiten evidenciar el impacto de los diferentes factores que actúan sobre una situación específica.

- Escribe tres situaciones que se puedan modelar matemáticamente.



Cultura del Buen Vivir

La comunicación

Este valor permite a las personas intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos en un ambiente de cordialidad.

- Redacta una situación en la que la comunicación te haya permitido solucionar de forma tranquila un inconveniente con otra persona.

Aprenderás...

- Proposiciones y conectivos lógicos
- Leyes de la lógica
- Expresiones algebraicas
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Relaciones
- Funciones. Fórmulas, tablas y representación gráfica
- Funciones de proporcionalidad directa e inversa

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

Cómo hacer un modelo matemático

Un modelo: *es la representación abstracta de algún aspecto de la realidad*...está basado en la lógica matemática, cuyos elementos son esencialmente variables y funciones, y las relaciones entre ellas, que vienen expresadas a través de relaciones matemáticas (ecuaciones, inecuaciones, operadores lógicos, etc.) que se empatan con las correspondientes relaciones del mundo real que modelizan (relaciones tecnológicas, leyes físicas, restricciones del mercado, etc.).

Una de las razones para obtener un modelo es la adecuación del cálculo del supuesto comportamiento de un proceso para determinadas condiciones, el cálculo depende de la aplicación; por ejemplo, un modelo de tratamiento de aguas debe ser usado para determinar la cantidad de contaminantes presentes para la limpieza parcial o total del agua tratada. De esta forma podemos mostrar que la importancia de los modelos matemáticos radica en que:

- Nos revela a veces relaciones que no son evidentes a primera vista.
- Una vez construido el modelo, es posible extraer de él propiedades y características de las relaciones que de otra forma permanecerían ocultas.
- En aquellas situaciones del mundo real en las que no es posible experimentar con la realidad, ofrecen un marco teórico para evaluar la toma de decisiones así como sus consecuencias.

Alejandro R., Ever P. y Carlos G.

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuál es la función de un modelo matemático?
2. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar un modelo matemático para describir el comportamiento de situaciones cotidianas?

Argumenta

3. Teniendo en cuenta que un gráfico, una función o una ecuación pueden ser modelos matemáticos de una situación específica, ¿crees que es posible crear un modelo matemático para cada situación o fenómeno? Explica

Propón

4. ¿Qué información te provee un modelo matemático relacionado con la situación representada en la fotografía?

1 Proposiciones

1.1 Proposiciones simples

Al leer las expresiones "2 + 8 = 11" y "Quito es la capital del Ecuador", se puede afirmar que la primera es falsa y la segunda verdadera; pero con respecto a las expresiones "¿Qué día es hoy?" y "¡Hola!" no es posible hacer lo mismo.

Según lo anterior, 2 + 8 = 11 y Quito es la capital de Ecuador son ejemplos de **proposiciones simples**.

Una **proposición simple** es una oración, expresión o enunciado sobre el que se puede asegurar que es verdadero o falso.

Las proposiciones simples se simbolizan con letras minúsculas (como p, q, r, s, t, etc.) y su **valor de verdad** se nota mediante V (si son verdaderas) o F (si son falsas).

Ejemplo 1

Observa los valores de verdad de estas proposiciones.

p: Cali es una ciudad de Colombia	(V)
q: España es un país de América	(F)
r: $15 \cdot 3 = 45$	(V)
s: Perú es una isla	(F)

1.2 Negación de proposiciones simples

Si p es una proposición simple, entonces **la negación de *p*** —denotada por $\sim p$ (que se lee "no p")— es otra proposición cuyo valor de verdad es opuesto al de p; es decir, si p es verdadera $\sim p$ es falsa, y si p es falsa $\sim p$ es verdadera.

Ejemplo 2

Sean las proposiciones simples:

p: La Tierra es plana

q: 18 es divisible por 3

r: 21 es un número primo

Entonces, las negaciones de p, q y r son, respectivamente:

$\sim p$: **No es cierto que** la Tierra es plana; o también,

$\sim p$: La Tierra **no** es plana.

$\sim q$: **No es cierto que** 18 es divisible por 3; o también,

$\sim q$: 18 **no** es divisible por 3.

$\sim r$: **No es cierto que** 21 es un número primo; o también,

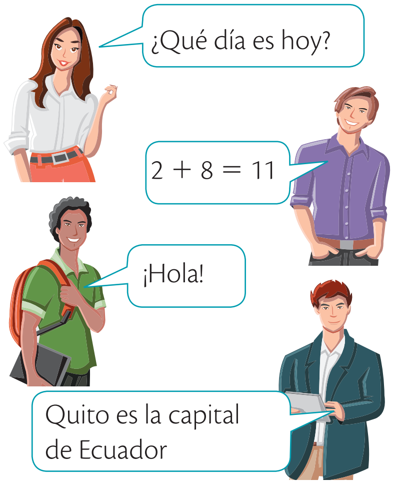
$\sim r$: 21 **no** es un número primo.

Se observa, además, que la proposición p es falsa (F), dado que se conoce con certeza que el planeta Tierra tiene forma esférica curvada, mientras que su negación $\sim p$ es verdadera (V). Con un análisis similar, se deduce que la proposición q es verdadera (V) y su negación $\sim q$ es falsa (F). Por último, la proposición r es falsa (F) y su negación $\sim r$ es verdadera (V).

Si p es una proposición simple, la **negación de su negación**, que se nota como $\sim(\sim p)$, es la misma proposición p.

Explora

Fíjate en estas expresiones.



- ¿Cuáles puedes clasificar como verdaderas o falsas?

Ten en cuenta

No son consideradas proposiciones simples las preguntas, exclamaciones o expresiones que no se encuentran completas; por ejemplo:

¿Qué día es hoy?

¡Hola!

Juan tiene...

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).

Ejemplo 3

La proposición simple p: 2 es un número primo, es verdadera.

La negación de la proposición p —que es $\sim p$: 2 no es un número primo— es falsa.

Por último, la negación de $\sim p$ —que es $\sim(\sim p)$: 2 es un número primo— es de nuevo la proposición p, de la cual se indicó que es verdadera.



Actividad resuelta

Comunicación

1 Encuentra la negación de las siguientes proposiciones simples.

a. Los buses articulados de la Ecovía son de color amarillo
b. $18 + 5 - 3 = 20$
c. 2 divide a 18

Solución:

a. Los buses articulados de la Ecovía **no son** de color amarillo
b. **No es cierto que** $18 + 5 - 3 = 20$
c. 2 **no** divide a 18

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las expresiones que se muestran a continuación son proposiciones simples.

a. Mañana comienza el invierno
b. $14 + 23 = 35$
c. Al sumar dos números naturales, el resultado obtenido es otro número natural
d. Caracas es la capital de Venezuela

Razonamiento

3 Copia la Tabla 1 en tu cuaderno y complétala marcando ✓ donde corresponda.

Proposición	V	F
Hoy es 7 de octubre		
El sistema solar está compuesto por ocho planetas		
$5 \times 8 = 40$		
$6 > 17$		
Los números pares son divisibles por 2		
Gabriel García Márquez es cantante		
No todos los números primos son impares		

Tabla 1

Ejercitación

4 Indica cuáles de las siguientes expresiones no se consideran proposiciones simples. Explica tu respuesta.

a. Perú es un país europeo
b. $18 < 21$
c. 7 en un número primo
d. ¿Cómo estás?

Comunicación

5 Simboliza las siguientes proposiciones. Luego, escribe la negación de cada una.

a. La bandera de Ecuador tiene cinco colores
b. $8 + 36 - 20 = 15$
c. El producto de dos números naturales es otro número natural
d. Un metro tiene 98 cm

Razonamiento

6 Determina el valor de verdad de cada proposición y de su negación.

a. La suma de dos números pares es otro número par
b. Los animales carnívoros se alimentan exclusivamente de las plantas
c. Las ballenas son mamíferos
d. 136 es múltiplo de 4

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 A una reina le gustaba plantear a sus súbditos retos lógicos. En una ocasión les enseñó un cofre con esta inscripción en la parte superior:

Es falso que la joya no está aquí

¿Qué pueden decir los súbditos con respecto a la ubicación de la joya si

a. la afirmación es verdadera?
b. la afirmación es falsa?

2 Proposiciones compuestas

Explora

Ten en cuenta la siguiente expresión.



- ¿Es una proposición? ¿Por qué?

La expresión "Está lloviendo y hace frío" está formada por dos proposiciones simples: p: está lloviendo y q: hace frío, unidas por el conectivo lógico ***y***; por tal razón es una **proposición compuesta**.

Las **proposiciones compuestas** son aquellas conformadas por dos o más proposiciones simples. En una proposición compuesta, las proposiciones simples se combinan mediante las partículas u operadores lógicos ***y***, ***o***, ***si... entonces***, o ***si y solo si***, los cuales se denominan **conectivos lógicos**.

Ejemplo 1

Las siguientes son proposiciones compuestas.

r: $2 + 2 = 4$ **y** Argentina es un país suramericano

s: Tres es un número par **o** siete es un número primo

t: Si Alberto ganó la lotería, **entonces** es millonario

v: Un triángulo es equilátero **si y solamente si** todos sus lados tienen la misma medida

Una **proposición compuesta** recibe un nombre particular de acuerdo con el conectivo lógico que ligue las dos proposiciones simples: conjunción, disyunción, implicación o equivalencia.

2.1 Conjunción

La **conjunción** es una proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico ***y***. Esta proposición es denotada por $p \wedge q$, y se lee "p y q".

La proposición $p \wedge q$ es verdadera únicamente cuando las proposiciones p y q son ambas verdaderas. Si al menos una de las proposiciones que la conforman es falsa, el valor de verdad de la conjunción es falso (Tabla 1).

Ten en cuenta

El arreglo que permite conocer todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama **tabla de verdad**. Así, la tabla de verdad de la conjunción está dada por:

Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1

Ejemplo 2

La proposición compuesta "3 es un número impar y 10 es divisible por 2" es una conjunción de la forma $p \wedge q$ que es verdadera, pues tanto p como q son proposiciones verdaderas.

Un **circuito lógico** es un conjunto de símbolos y operaciones que satisfacen las reglas de la lógica, simulando el comportamiento de un circuito eléctrico.

Para los interruptores p y q, su conexión en serie (sobre una misma línea) se puede representar como se muestra en la Figura 1.



Figura 1

En este circuito pasará corriente solamente en el caso de que p y q se encuentren cerrados. En otro caso, no habrá paso de corriente.

La Tabla 1 muestra lo que ocurre con el paso de corriente en cada uno de los cuatro casos posibles:

- Si los interruptores p y q están cerrados (o sea, si las proposiciones p y q son verdaderas) hay paso de corriente; es decir, $p \wedge q$ es verdadera.
- Si p está cerrado y q está abierto, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.
- Si p está abierto y q está cerrado, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.
- Si tanto p como q están abiertos, no hay paso de corriente: $p \wedge q$ es falsa.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para conectarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado).

2.2 Disyunción

La **disyunción** es una proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico ***o***. La disyunción de las proposiciones simples p y q se simboliza con $p \vee q$, y se lee "p o q".

La proposición $p \vee q$ es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones, p o q, es verdadera; es decir, la disyunción solamente es falsa si las dos proposiciones son falsas simultáneamente.

Tabla de verdad de la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2

Ejemplo 3

Considera este análisis.

Dadas las proposiciones p: La Luna es un satélite natural de la Tierra y $q: 9 \times 12 = 100$, entonces $p \vee q$ será la siguiente disyunción:

"La Luna es un satélite natural de la Tierra o $9 \times 12 = 100$".

Observa que p es verdadera y que q es falsa; por tanto, $p \vee q$ es verdadera, ya que basta con que una de las proposiciones sea verdadera para que la disyunción también lo sea. Esto se verifica en la Tabla 2.

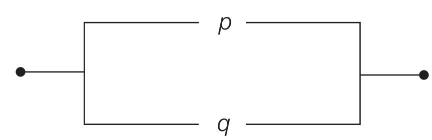


Figura 2

Dos interruptores se encuentran conectados en paralelo cuando se disponen en un circuito como el que se muestra en la Figura 2. Este tipo de circuito deja pasar corriente si por lo menos uno de los interruptores eléctricos, p o q, está cerrado.

La Tabla 2 de la disyunción se puede interpretar a la luz de este circuito de la siguiente forma:

- Si los dos interruptores (p y q) están cerrados, hay flujo de corriente. En términos lógicos, si tanto p como q son proposiciones verdaderas, la disyunción $p \vee q$ es verdadera.
- Si el interruptor p está cerrado y el interruptor q está abierto, hay paso de corriente. En este caso, $p \vee q$ es verdadera.
- Si el interruptor p está abierto y el interruptor q está cerrado, hay paso de corriente, tal como en el caso anterior. Bajo estas circunstancias, $p \vee q$ es nuevamente verdadera.
- Si tanto el interruptor p como el q están abiertos, no hay posibilidad de que fluya corriente y, por lo tanto, $p \vee q$ es falsa.

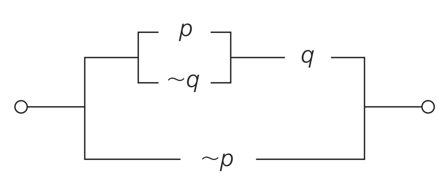


Figura 3

Ejemplo 4

La Tabla 3 muestra el valor de verdad de la proposición compuesta $[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee (\sim p)$, para completarla, se van poniendo por separado las proposicines compuestas mientras va aumentando su complejidad de izquierda a derecha, y el circuito correspondiente se ve en la Figura 3.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge q$	$[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee (\sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Tabla 3

2 Proposiciones compuestas

2.3 Implicación

Tabla de verdad de la implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4

La **implicación** o **condicional** es la proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico **si..., entonces...** En la proposición compuesta "Si p, entonces q" —que se simboliza como $p \rightarrow q$—, p recibe el nombre de **antecedente** y q de **consecuente**.

En general, la proposición $p \rightarrow q$ es falsa solamente cuando p es verdadera y q es falsa; es decir, cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. En todos los demás casos, la implicación será verdadera (Tabla 4).

Ejemplo 5

En la proposición "Si 8 y 22 son números impares, entonces 15 y 20 son números primos", se identifican las componentes p: 8 y 22 son números impares y q: 15 y 20 son números primos. Tanto p como q son falsas, de modo que $p \rightarrow q$ es verdadera.

Ejemplo 6

La implicación "Si apruebo la materia, te presto el libro", puede interpretarse como un compromiso condicionado por la aprobación de la materia y se puede asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Si el antecedente es falso, es decir, si no apruebo la materia, queda liberado el compromiso, y preste o no el libro la implicación es verdadera.

Por otra parte, si apruebo la materia y no presto el libro, el compromiso no se cumple y la implicación es falsa.

Finalmente, si tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos, entonces la implicación es verdadera, pues el compromiso se cumple.

2.4 Equivalencia

Tabla de verdad de la equivalencia

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 5

La **equivalencia** o **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta de combinar dos proposiciones mediante el conectivo lógico ***si y solamente si***. La equivalencia de las proposiciones simples p y q se simboliza con $p \leftrightarrow q$, y se lee "p si y solo si q".

La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas. En todos los demás casos, la equivalencia será falsa, como se verifica en la Tabla 5.

Ejemplo 7

La proposición "15 es divisible por 3 si y solo si 3 es un número par" es falsa, ya que las proposiciones componentes tienen diferente valor de verdad.

Ten en cuenta

La **lógica** es la rama del conocimiento que trata los métodos de razonamiento mediante una serie de reglas y técnicas, para determinar si un argumento es válido o no.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Determina el valor de verdad de las proposiciones compuestas.

a. 7 es un número primo, entonces es un número impar
b. 24 es un número par si y solo si es divisible por 9

Solución:

a. Como p: 7 es un número primo es verdadera y q: 7 es un número impar es verdadera, entonces, $p \rightarrow q$ es verdadera.

b. Como p: 24 es un número par es verdadera y q: 24 es divisible por 9 es falsa, entonces, $p \leftrightarrow q$ es falsa.

2.5 Tautología, contingencia y contradicción

Se puede conocer el valor de verdad de una proposición compuesta mediante la elaboración de tablas de verdad. Según el resultado, la proposición compuesta puede ser: tautología, contradicción o contingencia.

Una proposición compuesta es **tautología**, si es verdadera para todos los valores de verdad, es **contradicción** si es falsa para todos los valores de verdad y es **contingencia** si no es tautología ni contradicción.

Ejemplo 8

Determina el valor de verdad de la proposición $p \wedge q \rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 7

La proposición es una tautología.

Ejemplo 9

Determina el valor de verdad de la proposición $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Tabla 8

La proposición es una contingencia.

Ejemplo 10

Determina el valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \vee q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Tabla 9

La proposición es una contradicción.

CULTURA del Buen Vivir

La comunicación

En una buena comunicación se evitan las burlas, críticas o comentarios jocosos respecto a lo que otros expresan. Si es necesario corrige, pero nunca hagas sentir mal a los demás.

- ¿Cómo actúas frente a una respuesta desacertada dada por alguno de tus compañeros?

Actividad resuelta

Comunicación

2 Mediante tablas de verdad determina si las proposiciones dadas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a. $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim q$
V	F	V
F	V	V

La proposición es una tautología.

b. $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

La proposición es una contradicción.

c. $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

La proposición es una contingencia.

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad. Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Niega de dos formas cada proposición.

a. Lima es la capital de Perú
b. Un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes
c. Bolivia no tiene costa
d. Enero tiene 31 días
e. 77 es un número primo
f. El nombre Aurelio tiene las cinco vocales

4 Escribe la proposición compuesta representada en cada caso, si sabes que:

p: Un hexágono tiene seis lados, y
q: México está en Suramérica

a. $p \wedge q$ b. $p \rightarrow q$
c. $p \vee q$ d. $p \leftrightarrow q$
e. $\sim q$ f. $p \rightarrow \sim p$
g. $\sim q \wedge \sim p$ h. $\sim q \leftrightarrow \sim p$

Razonamiento

5 Determina el valor de verdad de las proposiciones que obtuviste en la actividad 4.

6 Escribe las proposiciones que se piden a continuación, si sabes que:

p: La ballena es un mamífero
q: El mercurio es un metal
r: La rosa es una flor

a. $\sim r$ b. $p \vee q$
c. $\sim p \wedge \sim r$ d. $\sim q \wedge \sim r$
e. $p \rightarrow q$ f. $r \leftrightarrow \sim p$

7 Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones simples. Luego, determina el valor de verdad de las proposiciones compuestas que se enuncian abajo.

p: 13 es un número primo
q: 77 es múltiplo de 11
r: 7 es divisor de 49

a. $p \vee q$ b. $p \leftrightarrow q$
c. $p \rightarrow q$ d. $p \vee \sim p$

Comunicación

8 Identifica las proposiciones simples que componen cada una de las proposiciones compuestas.

a. Si 27 es un número impar, entonces 12 es divisible por 5
b. 15 es divisible por 3 si y solo si 2 es un número primo
c. 2 no es un número par o 12 es divisible por 5
d. 27 no es un número impar y 18 es un múltiplo de 9

Razonamiento

9 Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, indica además si la proposición compuesta es una tautología o una contradicción, suponiendo que p es falsa y q es verdadera.

a. $p \vee q$ b. $p \wedge q$
c. $p \vee \sim q$ d. $\sim p \wedge q$
e. $p \vee \sim p$ f. $\sim p \rightarrow \sim p$
g. $p \leftrightarrow \sim p$ h. $\sim q \rightarrow p$
i. $p \leftrightarrow \sim q$ j. $\sim p \wedge \sim q$
k. $p \rightarrow q$ l. $\sim p \leftrightarrow \sim p$

Resolución de problemas

10 Cierto día lluvioso y frío, un grupo de amigos compartía su merienda. Cada uno de ellos hizo una afirmación:

- Juan dijo: "si no llueve, entonces hace frío."
- Felipe dijo: "si no llueve, entonces no hace frío."
- Marcela dijo: "si llueve, entonces no hace frío."
- Otro compañero que los escuchaba les dijo: "uno de ustedes ha hecho una afirmación falsa."

¿Cuál de los tres amigos fue quien dijo una proposición falsa? Explica tu respuesta.

11 Escribe con símbolos cada enunciado, a partir de las siguientes proposiciones.

p: Las estrellas emiten luz
q: Los planetas reflejan la luz
r: Los planetas giran alrededor de las estrellas

a. Si las estrellas emiten luz, entonces los planetas la reflejan y giran alrededor de ellas.
b. Las estrellas emiten luz o los planetas la reflejan y, por otra parte, los planetas giran alrededor de ellas.
c. Los planetas reflejan luz si y solo si las estrellas la emiten, y los planetas giran alrededor de estas.

Números y letras 3

3.1 Lenguaje algebraico

Si se representa el número de libros que tiene Jairo con la letra *a*, entonces la expresión $3a$ corresponde al triple de los libros que tiene Jairo, y la expresión $3a + 5$ indica el triple de los libros que tiene Jairo más 5. Esta expresión representa la cantidad de libros que tiene Ana.

El **lenguaje algebraico** utiliza una combinación de números y letras relacionados por los signos de las operaciones con el fin de expresar información.

Ejemplo 1

En la Figura 1 se observa una pintura de forma rectangular y su marco a dos centímetros de los lados del lienzo. Como no se conoce la longitud de los lados del lienzo, se escogen las letras *a* y *b* para designarlos.

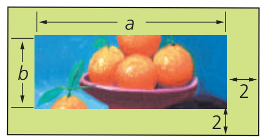


Figura 1

Las expresiones $2 \cdot (a + b)$ y $a \cdot b$ representan el perímetro y el área del lienzo, respectivamente. Por su parte, el área del marco en lenguaje algebraico es:

$$(a + 4) \cdot (b + 4) - a \cdot b$$

Explora

Jairo tiene cierta cantidad de libros, y Ana tiene el triple de los libros que tiene Jairo más cinco.



- ¿Cómo se puede expresar el número de libros que tiene Ana?

3.2 Uso de las letras para expresar relaciones

Con las **letras** se expresan de forma concisa **relaciones** y **propiedades** entre magnitudes. Las expresiones literales reciben el nombre de **fórmulas**.

Ejemplo 2

Con letras y signos matemáticos se pueden expresar el perímetro y el área de los rectángulos de las Figuras 2 a la 4.

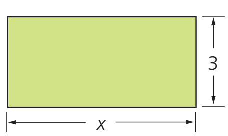
a. 

Figura 2

$P = 2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$

$A = 3x$

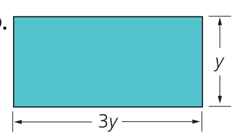
b. 

Figura 3

$P = 2 \cdot (3y + y) = 8y$

$A = 3y \cdot y = 3y^2$

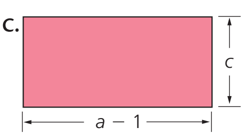
c. 

Figura 4

$P = 2 \cdot (a - 1 + c) = 2a + 2c - 2$

$A = (a - 1) \cdot c = ac - c$

Ejemplo 3

Un grifo vierte 10 cm^3 de agua cada minuto en un recipiente. Las magnitudes tiempo y volumen, representadas con las letras *t* y *V* respectivamente, se relacionan como se muestra en la Tabla 1.

Tiempo (min)	1	2	3	...	t
Volumen (cm^3)	10	20	30	...	$V = 10 \cdot t$

Tabla 1

Ten en cuenta

Las letras empleadas en el lenguaje algebraico se denominan **variables** o **incógnitas** y se utilizan para designar valores desconocidos.

Ten en cuenta

Un **término** es una expresión algebraica en la cual solo hay operaciones de multiplicación y división de letras y números (tanto el número como la letra pueden estar elevados a una potencia). Un término consta de dos partes: numérica y literal.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Un pintor recubre de barniz piezas cuadradas de madera. Cobra \$5 por metro cuadrado barnizado y \$10 por el desplazamiento. Expresa la relación de la superficie barnizada y el costo mediante una fórmula.

Solución:

Si se designa con *x* el lado del cuadrado, x^2 es la superficie barnizada. Si con la letra *y* se designa el costo, entonces la fórmula es $y = 5 \cdot x^2 + 10$.



Destrezas con criterios de desempeño: Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.
Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Utiliza el lenguaje algebraico para escribir las siguientes expresiones.

a. El área de un triángulo.

b. El perímetro de un cuadrado.

c. El producto de dos números consecutivos.

d. El cuadrado de un número más su mitad.

e. El triple de un número menos cuatro.

f. El triple de un número más su cuarta parte.

g. El cuadrado de la diferencia de dos números.

h. La diferencia de los cuadrados de dos números.

i. La tercera parte de la suma de tres números.

3 Relaciona cada enunciado con su correspondiente expresión en lenguaje algebraico.

a. El cuadrado de un número menos su triple.	( ) $\frac{2}{4}x + 7$
b. El 70% de un número.	( ) $x^2 - 3x$
c. Un número impar.	( ) $2x$
d. Los dos cuartos de un número más siete unidades.	( ) $2x + 1$
e. Un número par.	( ) $0{,}7x$

4 Lee y resuelve.

El salario de un vendedor de automóviles se compone de un sueldo fijo de $ 800 mensuales y de una comisión de $ 2 000 por automóvil vendido.

a. Expresa cuánto gana el vendedor en un mes si vende x automóviles.

b. Si en el mes de mayo el vendedor concreta la venta de cinco automóviles, ¿cuál fue su salario ese mes?

c. Si en junio el vendedor recibió un salario de $ 10 800, ¿cuántos autos vendió ese mes?

5 Expresa los siguientes enunciados en lenguaje algebraico. Ten en cuenta que x y y son las edades actuales de dos hermanos.

a. La suma de las edades que tenían los hermanos hace 5 años.

b. El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.

c. La diferencia entre la edad del hermano mayor y la mitad de la edad del hermano menor.

Comunicación

6 Representa algebraicamente el área del trapecio rectángulo de la Figura 5.

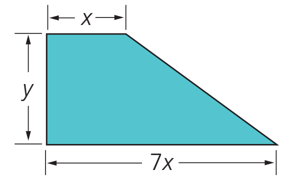


Figura 5

7 Expresa algebraicamente el perímetro y el área de cada uno de los rectángulos de la Figura 6.

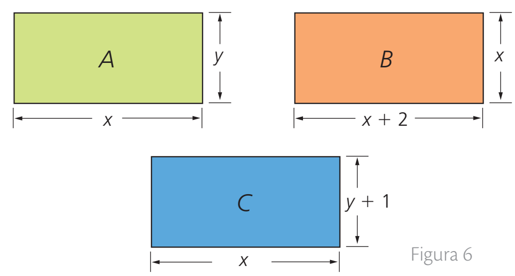


Figura 6

8 Expresa en lenguaje algebraico el volumen del ortoedro de la Figura 7, cuyas dimensiones son tres números consecutivos, si se sabe que la longitud de la menor dimensión es x metros.

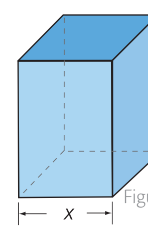
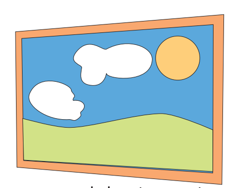


Figura 7

Resolución de problemas

9 Un cristal para enmarcar cuadros tiene un precio fijo de $ 20, y cada decímetro del marco cuesta $ 3.



a. Expresa con una fórmula lo que se debe invertir para enmarcar un cuadro cualquiera.

b. ¿Cuánto cuesta enmarcar un cuadro que tiene 80 cm de largo y 30 cm de ancho?

c. Si Jaime pagó $ 80 por enmarcar un cuadro, ¿se pueden saber con exactitud las dimensiones del cuadro? (Si es así, indícalas; si no lo es, escribe algunas posibles dimensiones).

10 Un recipiente contiene 6 L de agua y cada hora se vierten en este 0,7 L de agua.

a. Expresa con lenguaje matemático la información.

b. Al cabo de ocho horas y media, ¿cuántos litros de agua contendrá el recipiente?

c. Si la capacidad del recipiente es de 12 L, ¿en cuánto tiempo se habrá llenado completamente?

Expresiones algebraicas

Para analizar el problema, se usará el lenguaje algebraico. Si se designa con x el precio del iPod, las diversas situaciones enunciadas en el problema se pueden expresar como se muestra en la Tabla 1.

Situación	Expresión verbal	Expresión matemática
Precio del iPod	Entre \$ 80 y \$ 100	$80 < x < 100$
Dinero que le regala el papá a Yesid	La mitad del precio	$\frac{1}{2}x$
Aporte de la mamá	Le da \$ 20	\$ 20
Ahorros de Yesid	La cuarta parte del precio del iPod	$\frac{1}{4}x$
Dinero que tiene para la compra	La suma de sus ahorros más lo que le dieron sus padres	$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 20$

Tabla 1

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo 1

El volumen del cilindro de la Figura 1, cuya altura h mide el doble del radio r de la base, se calcula mediante la expresión $V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Ejemplo 2

- La distancia d recorrida por un vehículo que lleva una velocidad constante v durante un tiempo t es: $d = v \cdot t$
- El área A de un cubo de arista a es: $A = 6a^2$
- La densidad D de un cuerpo de masa m y volumen V es: $D = \frac{m}{V}$

4.1 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el número que se obtiene al sustituir las letras por números determinados y hacer las operaciones indicadas.

Ejemplo 3

El área de cualquier rectángulo de lados a y b se calcula mediante la expresión $A = a \cdot b$.

Si el rectángulo de la Figura 2 tiene 4 unidades de ancho y 6 unidades de largo, su área es:

$A = 6 \cdot 4 = 24$ unidades cuadradas.

El número 24 es el **valor numérico** de la expresión algebraica $a \cdot b$ cuando $a = 6$ y $b = 4$.



Figura 2

Actividad resuelta

Comunicación

1 Escribe la expresión algebraica del área del trapecio de la Figura 3 e indica el significado de las letras.

Solución:

El área del trapecio es $\frac{1}{2}(B + b) \cdot h$, donde B es la base mayor del trapecio, b es la base menor y h es la altura.

Explora

Yesid desea comprar un iPod que cuesta entre \$ 80 y \$ 100. Su papá le regaló la mitad de ese valor y su mamá le dio \$ 20.

- Si Yesid ya había ahorrado una cuarta parte de lo que cuesta el aparato, ¿cuánto dinero reunió para comprarlo?

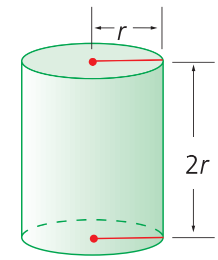


Figura 1

Ten en cuenta

El valor numérico depende del valor que se dé a las letras.

Datos → Fórmula → Valor numérico

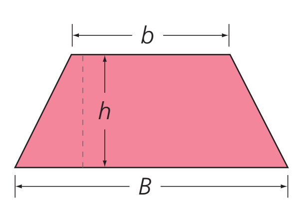


Figura 3

Destreza con criterios de desempeño: Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe en cada situación la expresión algebraica que le corresponda.

a. El perímetro de un cuadrado de lado $m + 1$.

b. El cociente de dos números consecutivos.

c. La raíz cuadrada del triple de un número.

d. Las dos terceras partes de la raíz cuadrada de un número.

e. La diferencia de dos números pares consecutivos.

f. El producto de un número con la tercera parte del mismo.

g. La suma del doble de un número con su cuarta parte.

Modelación

3 Traduce al lenguaje natural cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $2 \cdot (a + b)$

b. $3b^3 - b^2$

c. $(x + y)^2$

d. $3 \cdot \sqrt{x - 1}$

e. $x^2 \cdot (x + 1)^2$

f. $3x \cdot x^2$

Razonamiento

4 Halla la expresión algebraica que expresa el volumen de los sólidos de las figuras 4 y 5.

a.

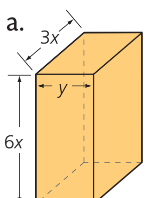


Figura 4

b.

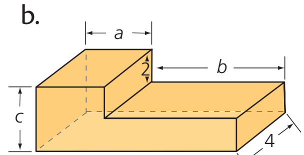


Figura 5

5 Escribe las expresiones que representan el perímetro de la Figura 6 y el área del rectángulo de la Figura 7.

a.

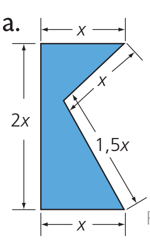


Figura 6

b.

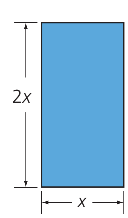


Figura 7

Ejercitación

6 Calcula el valor numérico de cada expresión, si $x = -2$.

a. $x - 3$

b. $2 - x$

c. $(x + 1)(x - 2)$

d. $8 - x^2$

e. $-(1 - x^2)$

f. $2x - \frac{1}{2}x^2$

7 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican.

a. $x^2 - x$, para $x = 3$

b. $4x - 5$, para $x = 1$

c. $3z^2 - 10$, para $z = 2$

d. $20 - 2rt^2$, para $r = 1$ y para $t = 5$

Razonamiento

8 Determina para qué valores de la letra el valor numérico de las expresiones es 0.

a. $(a + 1)(a + 2)$

b. $x^3 + 8$

c. $x^2 - 1$

d. $(2x + 4)(x - 10)$

9 Encuentra el valor del área de una superficie cuadrada de 7,5 m de lado.

10 Calcula el valor de L en la fórmula $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, que relaciona la longitud y el radio de una circunferencia, dado que $r = 2$ cm, $r = 0$ y $r = 5$ cm.

Resolución de problemas

11 Un automóvil, cuyo tanque contiene 40 L de gasolina, consume 5 L por cada 100 km recorridos.

a. Expresa mediante una fórmula los litros de gasolina que quedan en el tanque a medida que el automóvil recorre kilómetros.

b. Si el auto sale con el tanque completamente lleno, ¿cuántos kilómetros recorrerá antes de quedar desocupado?

12 Un pintor cobra su trabajo del siguiente modo: \$ 200 al iniciar el trabajo y \$ 4 por metro cuadrado pintado.

a. Con esta información, calcula mediante una fórmula cuánto cobra por pintar los 350 m^2 de pared de un apartamento.

b. Si el pintor cobra \$ 620 por pintar 80 m^2 de pared, ¿fue honesto al hacer el cobro?

13 Luis es un técnico informático al que le pagan \$ 75 por la revisión de cada computador, aunque le descuentan el 12 % de la cantidad que cobra por concepto del IVA.

a. Halla la fórmula que relaciona el dinero d que recibe el técnico y el número x de computadores revisados.

b. ¿Cuánto recibe el técnico por la revisión de 15 computadores?

Sistema de coordenadas cartesianas

Para indicar cualquier posición en la cuadrícula, cada jugadora debe sugerir un cierto número de unidades a la derecha o a la izquierda del cero y un cierto desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo. En la Figura 1, el tesoro *A* está ubicado 3 unidades a la izquierda del 0 y 2 unidades arriba, lo cual se indica de manera abreviada como $A(-3, 2)$. Los números -3 y 2 son las **coordenadas** de la ubicación del tesoro en el tablero.

Un **sistema de coordenadas cartesianas** está formado por dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, denominadas **ejes de coordenadas**, que dividen el plano en **cuatro cuadrantes**.

En la Figura 2 se representa un sistema de coordenadas cartesianas.

- El punto de intersección de los ejes es el **origen de coordenadas**.
- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o eje *X*.
- El eje vertical recibe el nombre de **eje de ordenadas** o eje *Y*.
- Los puntos del plano se indican dando sus dos coordenadas $P(x, y)$.

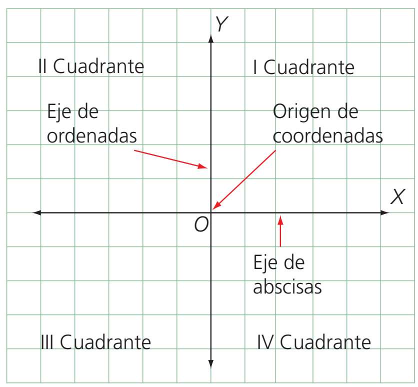


Figura 2

Explora

Lucía invita a Sara a jugar "Encuentra el tesoro". Para ello, cada una tiene un tablero con una cuadrícula numerada como la de la Figura 1, en la cual ubica el tesoro que la otra debe descubrir.

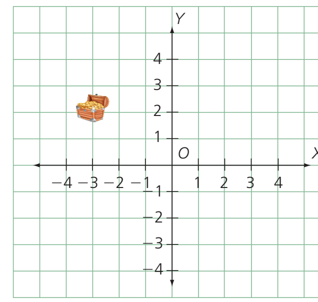


Figura 1

- ¿Qué deben tener en cuenta las jugadoras para encontrar el tesoro?

5.1 Parejas ordenadas con números enteros

Una **pareja ordenada de números enteros** es una representación numérica que consta de dos números enteros, no necesariamente distintos, escritos en un orden específico. La notación (x, y) representa la pareja ordenada cuyo primer elemento es *x* y cuyo segundo elemento es *y*.

Ten en cuenta

A cada punto del plano le corresponde una única pareja ordenada.

La coordenada *x* indica el desplazamiento sobre el eje horizontal *X*. Si el valor es positivo, el desplazamiento se realiza hacia la derecha del origen de coordenadas tantas unidades como indique el número; si es negativo, las unidades se contarán hacia la izquierda de dicho punto.

Por su parte, la coordenada *y* corresponde al desplazamiento sobre el eje *Y*; hacia arriba si el número es positivo o hacia abajo si es negativo. El punto de referencia es el origen de coordenadas.

Ten en cuenta

La pareja ordenada (x, y) no es la misma que la pareja ordenada (y, x).

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Ejemplo 1

En la Figura 3 se observa la representación de los puntos $A(3, 2)$ y $C(-2, -1)$.

El punto $A(3, 2)$ está 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba, tomando como referencia el origen de coordenadas. Como $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son positivos, el punto *A* está en el cuadrante I.

El punto $C(-2, -1)$ está ubicado 2 unidades a la izquierda de 0 y una unidad hacia abajo. Como $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son negativos, el punto *C* está en el cuadrante III.

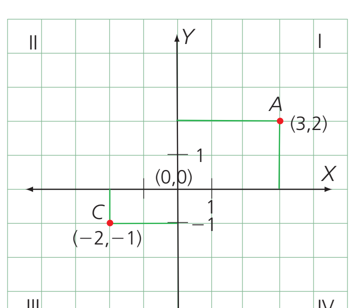


Figura 3

Destreza con criterios de desempeño: Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano.

Ten en cuenta

- Cualquier pareja de la forma (0, *b*) está sobre el eje *Y*.
- Cualquier pareja de la forma (*a*, 0) está sobre el eje *X*.

5.2 Parejas ordenadas con números racionales

Una **pareja ordenada con números racionales** (x, y) es aquella que tiene como coordenadas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ números racionales.

Para representar en el plano parejas ordenadas con números racionales expresados como fracción, se deben realizar procedimientos similares a los utilizados para representar números racionales en la recta numérica.

Ejemplo 2

Para representar el punto $A\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{3}\right)$ en el plano cartesiano, se ubica la primera componente a la derecha del eje *Y* y la segunda en la parte negativa del eje *Y*; al trazar la perpendicular de los ejes coordenados desde esos puntos, se encuentra su intersección donde se ubica el punto *A*. En el par ordenado $B\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$ se puede observar que el valor de *x* es negativo y el de *y* también lo es, razón por la que tal punto se localiza en el tercer cuadrante. Si el punto a localizar es $C\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$, dicho punto estará en el segundo cuadrante; y si es $D\left(\frac{7}{2}, 3\right)$, estará en el primer cuadrante.

La Figura 4 muestra la representación de los puntos $A\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{3}\right)$, $B\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$, $C\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$ y $D\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

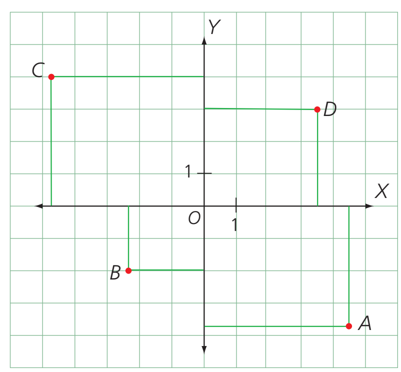


Figura 4

Ten en cuenta

- Todos los puntos que están sobre la recta vertical que pasa por (*a*, *b*) tienen abscisa *a*.
- Todos los puntos que están sobre la recta horizontal que pasa por (*a*, *b*) tienen ordenada *b*.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www disfrutalas matematicas.com/geometria/ index.html

Practica la ubicación de parejas ordenadas en el plano cartesiano.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Encuentra varias parejas ordenadas que sean solución de la ecuación $y = 2x + \frac{3}{2}$, y ubícalas en un sistema de coordenadas.

Solución:

Una manera de obtener algunas soluciones de la ecuación consiste en dar valores a la incógnita *x* y calcular el valor numérico de la expresión, así:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot (0) + \frac{3}{2} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad A\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (1) + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ $\quad B\left(1, \frac{7}{2}\right)$

Si $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) + \frac{3}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ $\quad C\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

La Figura 5 muestra la representación en el plano de los pares ordenados que se formaron.

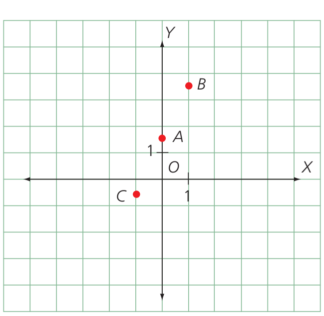


Figura 5

Sistema de coordenadas cartesianas

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Represente los siguientes puntos en un plano cartesiano.

a. $A(0, 2)$ b. $C(-3, 3)$ c. $E(-4, -4)$
d. $B(1, -6)$ e. $D(4, 0)$ f. $F(-5, -4)$

3 Ubica en el plano cartesiano cada par de puntos y determina las coordenadas del punto medio entre los dos.

a. $(2, 4)$ y $(2, 10)$ b. $(6, 3)$ y $(2, 3)$

4 Escribe las coordenadas de los puntos representados en el plano de la Figura 6.

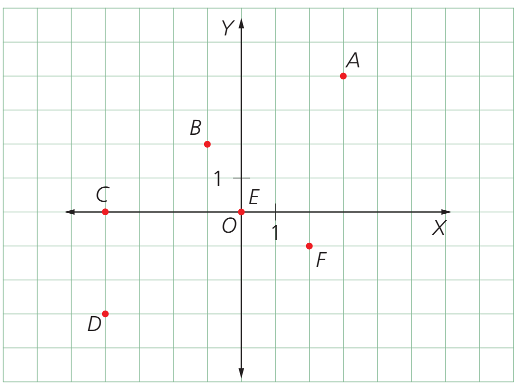


Figura 6

Modelación

5 Lee y resuelve.

En la Figura 7, los puntos $A(3, 2)$ y $B(-3, 2)$ corresponden a puntos simétricos respecto al eje Y; ambos puntos tienen la misma ordenada, y la abscisa del punto A es el opuesto de la abscisa del punto B.

Los puntos $B(-3, 2)$ y $C(-3, -2)$ son simétricos respecto al eje X; ambos puntos tienen la misma abscisa, y la ordenada de uno es el opuesto de la ordenada del otro.

Los puntos $C(-3, -2)$ y A $(3, 2)$ son simétricos respecto al origen. La abscisa del punto C es el opuesto de la abscisa del punto A, y la ordenada del punto C es el opuesto de la ordenada del punto A.

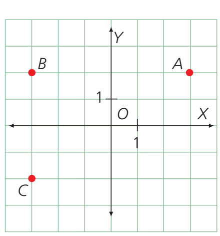


Figura 7

Halla las coordenadas del punto simétrico al punto dado, respecto a cada eje y al origen.

a. $(-2, -1)$ b. $(3, 0)$ c. $(0, 4)$

6 Dibuja en el plano cartesiano los polígonos cuyos vértices son los puntos que se indican.

a. $A(-4, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(0, -5)$

b. $A(-7, -4)$, $B(-6, -2)$, $C(-2, -1)$, $D(-2, -5)$ y $E(-4, -6)$

7 Ubica sobre el plano cartesiano las coordenadas que se indican y une con una línea los puntos obtenidos en el orden dado. Descubre la palabra que arruinó la vida del rey Midas.

- Une estos puntos en orden y descubre la letra inicial: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 1)$ y $(1, 1)$.
- Une estos puntos en orden y descubre la segunda letra: $(4, 1)$, $(4, 4)$, $(6, 4)$, $(6, 3)$, $(5, 2)$ y $(6, 1)$.
- Une estos puntos en orden y descubre la tercera letra: $(7, 4)$, $(9, 4)$, $(9, 1)$, $(7, 1)$ y $(7, 4)$.

La palabra escondida es: ______________.

8 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. La intersección de los ejes tiene coordenadas $(0, 0)$. ( )

b. Un punto en el cuadrante III tiene abscisa negativa y ordenada positiva. ( )

c. La intersección de los ejes de coordenadas divide al plano en cuatro cuadrantes. ( )

Comunicación

9 Observa la Figura 8, y responde.

a. Si el punto A se gira 90° en el sentido de las manecillas del reloj y el punto B se mantiene en el mismo lugar, ¿cuáles son las nuevas coordenadas del punto A?

b. Nombra las coordenadas del punto B y C, si el triángulo ABC se trasladara tres unidades a la izquierda y dos hacia arriba.

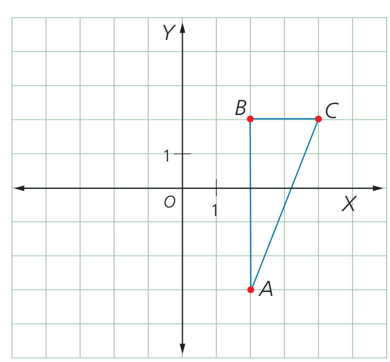


Figura 8

Destreza con criterios de desempeño: Ubicar pares ordenados con números enteros y racionales, en el plano cartesiano.

Razonamiento

10 Indica en qué cuadrante está cada uno de los siguientes puntos. Si no está en ninguno de ellos, explica la razón.

a. $A(-2, -5)$ b. $B(1, 2)$
c. $C(5, 0)$ d. $D(-6, 8)$
e. $E(0, 5)$ f. $F(8, -5)$
g. $G(4, 4)$ h. $H(1, -5)$

11 Escribe las coordenadas de un punto *B* que tenga como abscisa el doble de la del punto $A(-3, 6)$ y esté sobre el eje de abscisas.

Resolución de problemas

12 ¿Qué valor debe tomar *k* para que el punto $A(2, 3k-12)$ esté sobre el eje *X*?

13 En una isla se encuentra oculto un tesoro exactamente en el punto de corte del segmento *AB* con el segmento *CD*. Si las coordenadas de cada punto son: $A(4, 5)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$ y $D(0, 2)$, traza los segmentos en un plano cartesiano e indica las coordenadas del punto en el que está ubicado el tesoro.

14 Si la hipotenusa del triángulo rectángulo de la Figura 9 está sobre el eje de las *X*, ¿cuáles son las coordenadas del punto *B*?

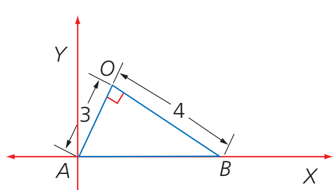


Figura 9

15 Observa la Figura 10, y responde.

a. En el eje de las *X*, ¿qué coordenadas indican los extremos del diámetro?

b. Si la circunferencia se moviera tres unidades a la izquierda y dos hacia abajo, ¿cuáles serían las coordenadas de su centro?

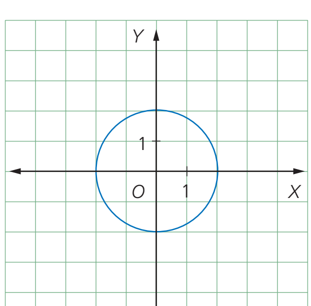


Figura 10

16 En el plano de la Figura 11 se trazó un polígono cuyos vértices son los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.

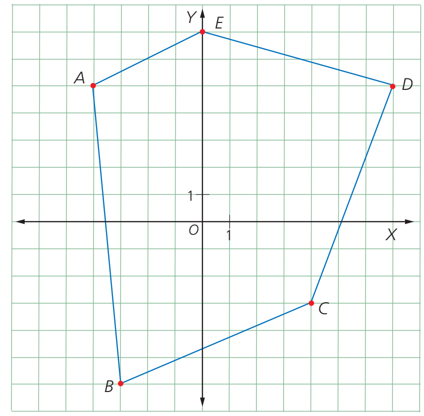


Figura 11

a. Determina las coordenadas de cada uno de los vértices del polígono.
b. Según el número de lados, ¿qué tipo de polígono es *ABCDE*?
c. Indica las coordenadas de un polígono regular con el mismo número de lados que *ABCDE*.

17 Responde las preguntas a partir de la información provista en la Figura 12.

a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto correspondiente a la intersección de las diagonales del hexágono?
b. ¿Cuáles serían las coordenadas de tal punto si el hexágono se traslada dos unidades a la derecha?

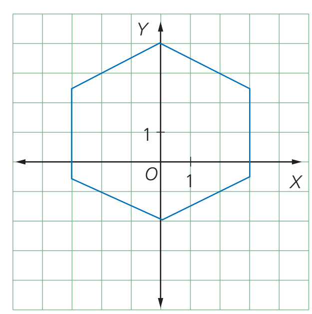


Figura 12

18 La casa de Manuela está ubicada en el punto (5, 10), el colegio en el punto (8, 4) y el parque en el punto (1, 2).

a. Ubica en el plano los tres lugares.
b. Traza algunas rutas para ir de la casa al colegio. ¿Cuál es la ruta más corta?
c. ¿Qué lugar está más cerca del parque, la casa de Manuela o el colegio?

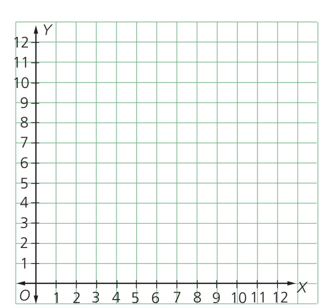


Figura 13

Funciones 6

6.1 Relaciones

Una relación de un conjunto **A** en un conjunto **B** es el conjunto **R** de pares ordenados que satisfacen una regla o propiedad y tales que, el primer elemento pertenece a **A** y el segundo elemento pertenece a **B**.

$$R \subseteq A X B$$

El conjunto A se llama conjunto de partida y el conjunto B se llama conjunto de llegada (figura 1).

Ejemplo 1

Es una relación:

Cada persona está relacionada con un nombre

Esto es similar a decir que: A cada persona le corresponde un nombre.

Ejemplo 2

Sean los conjuntos A= {1,2,3} y B={5,6,}

El producto cartesiano A X B = {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)}

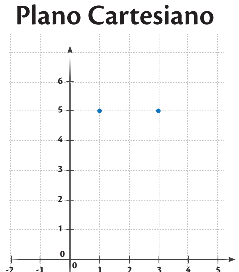
Del producto cartesiano A X B se podrían extraer varias relaciones como:

Relación 1: Conjunto de los pares ordenados tales que los dos elementos del par ordenado sean impares: {(1,5),(3,5)}

Relación 2: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea par: {(1,5),(2,6),(3,5)}

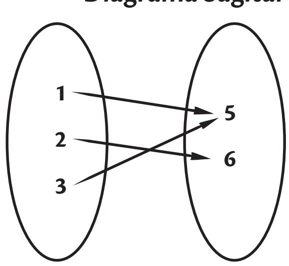
Las relaciones se representan gráficamente mediante el plano cartesiano o un diagrama sagital así:

Plano Cartesiano



Relación 1

Diagrama Sagital



Relación 2

Actividad resuelta

1. En referencia a la figura 1, escribe los pares ordenados de las siguientes relaciones:

   a. Conjunto de los pares ordenados cuyo resultado de la suma de sus elementos sea 8 o 9.

   b. Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea 1 o 2.

Solución

a. {(2,6),(3,5),(3,6)}

b. {(3,5)}

Explora

Observa los elementos de los conjuntos A y B.

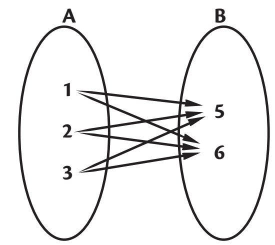


Figura 1

¿Cuántos pares ordenados se pueden formar?

Ten en cuenta

Producto cartesiano

El producto cartesiano A X B se define como:

$A X B = \{(x, y)\ x \in A \text{ y } y \in B\}$

$A X B \neq B X A$

Si A define el número natural n y B define el número natural m, entonces $A X B$ define el número $n \cdot m$.

Ten en cuenta

Las relaciones son subconjuntos de pares ordenados que se forman del **producto cartesiano** entre los elementos de dos conjuntos, como se indica en el ejemplo 2.

6 Funciones

Explora

Raúl necesita sacar fotocopias para un trabajo de biología.



- Si por cada fotocopia paga $ 0,02, ¿cómo puede determinar cuánto debe pagar por cierta cantidad de fotocopias?

Ten en cuenta

En una correspondencia, al primer conjunto se le denomina **conjunto de partida** y al segundo conjunto se le conoce como **conjunto de llegada**.

CULTURA del Buen Vivir

La comunicación

Una buena comunicación nos permite intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos con las personas que nos rodean, en un ambiente de cordialidad.

- Describe una situación donde hayas establecido una buena comunicación con tu profesor y con tus compañeros.

6.2 Fórmulas, tablas y gráficas

Una forma de responder la pregunta consiste en registrar en una tabla como la siguiente, la relación entre el número de fotocopias y el costo a pagar.

Número de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8
Costo ($)	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16

Tabla 1

En la Tabla 1 se observa que para averiguar el costo a pagar por cualquier número de fotocopias, basta con multiplicar el número de fotocopias por el costo de una. Con lo anterior se obtiene la fórmula $y = 0{,}02 \cdot x$, donde x indica el número de fotocopias.

Si una magnitud depende de otra, se puede expresar esta dependencia mediante una **fórmula**, una **tabla** o una **gráfica**.

La magnitud que se fija previamente es la **variable independiente**.

La magnitud que se deduce de la otra es la **variable dependiente.**

Ejemplo 3

En la situación inicial, la variable independiente es el número de fotocopias y la variable dependiente es el costo total.

Ejemplo 4

El área de un cuadrado es igual a lado por lado. El valor del área depende de la medida del lado. Esta relación entre el lado y el área se puede expresar de varias maneras:

Con una fórmula: $A = l^2$

Con una tabla:

Lado (cm)	1	1,5	2	2,5	3	...	5
Área (cm^2)	1	2,25	4	6,25	9	...	25

Tabla 2

Con una gráfica:

La variable lado (l) corresponde a la variable independiente, y la variable área (A) corresponde a la variable dependiente. La gráfica se muestra en la Figura 2.

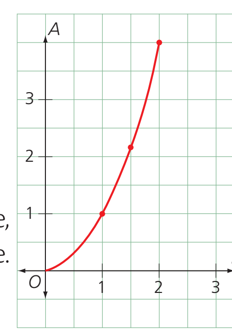


Figura 2

Ejemplo 5

El Ministerio de Salud ha hecho un estudio sobre el peligro del consumo de tabaco. Los resultados se muestran en la Tabla 3.

Número de cigarrillos diarios	3	5	10	15	20
Índice de mortalidad	0,2	0,3	0,6	0,8	1,2

Tabla 3

Las magnitudes *Índice de mortalidad* y *Número de cigarrillos diarios* están correlacionadas y son dependientes entre sí, ya que un incremento de la segunda lleva a un aumento de la primera.

En matemáticas, cuando existe una relación de dependencia entre dos magnitudes se dice que se puede expresar una en **función** de la otra.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos) representándolas con pares ordenados.

6.3 Concepto de función

Una **función** es una relación entre un conjunto, llamado **dominio**, y otro conjunto, llamado **rango**, de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango.

Ejemplo 6

En la Tabla 4 se registran algunos valores para una función que asigna a cada número su mitad; esto es, $f(x) = \frac{x}{2}$.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	1,5	2	2,5	3

Tabla 4

En este caso, x es la variable independiente y $f(x)$ (que también se puede notar como y) es la variable dependiente.

6.4 Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función se siguen estos pasos.

1. Se construye una tabla de valores.
2. Se representan los puntos obtenidos sobre el plano cartesiano y se unen, si es el caso.

Ejemplo 7

Una función f asigna a cada número entero su doble más 1: $f(x) = 2x + 1$. En la Tabla 5 figuran algunos valores de la función y la Figura 3 muestra su representación.

x	y
−3	−5
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5
3	7

Tabla 5

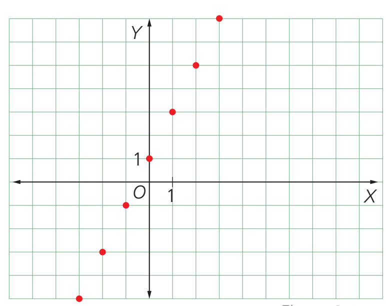


Figura 3

Como f está definida solo para los números enteros, no se unen los puntos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 Ricardo paga en su recibo de teléfono \$ 0,12 por minuto y \$ 0,25 de cargo fijo.

Escribe la función que relaciona el tiempo que dura la llamada con el precio.

Solución:

La función es $f(x) = 0,25 + 0,12\,x$, donde x es el tiempo en minutos.

La Tabla 6 muestra algunos valores de x y sus imágenes.

x	1	2	3	5	6
y	0,37	0,49	0,61	0,85	0,97

Tabla 6

La Figura 4 representa la función $f(x)$.

Ten en cuenta

- El **dominio** de una función es el conjunto de los valores que se le asignan a x (variable independiente).
- El **rango** de una función es el conjunto de los valores que toma la función y (variable dependiente); por eso se denomina $f(x)$.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

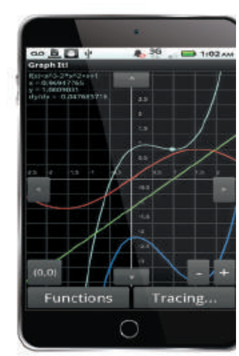
http://www.disfrutalas matematicas.com/puzzles/puzzles-de-logica-index.html

Refuerza el concepto de función.

App

Funciones

Abre la aplicación *Graph it!* y obtén la gráfica de algunas funciones de proporcionalidad directa.



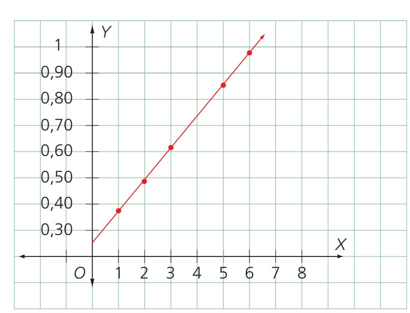


Figura 4

6 Funciones

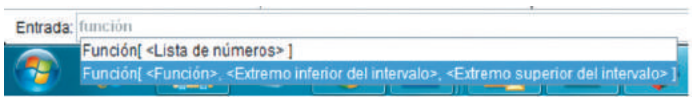
MatemaTICS

Usa GeoGebra para graficar funciones

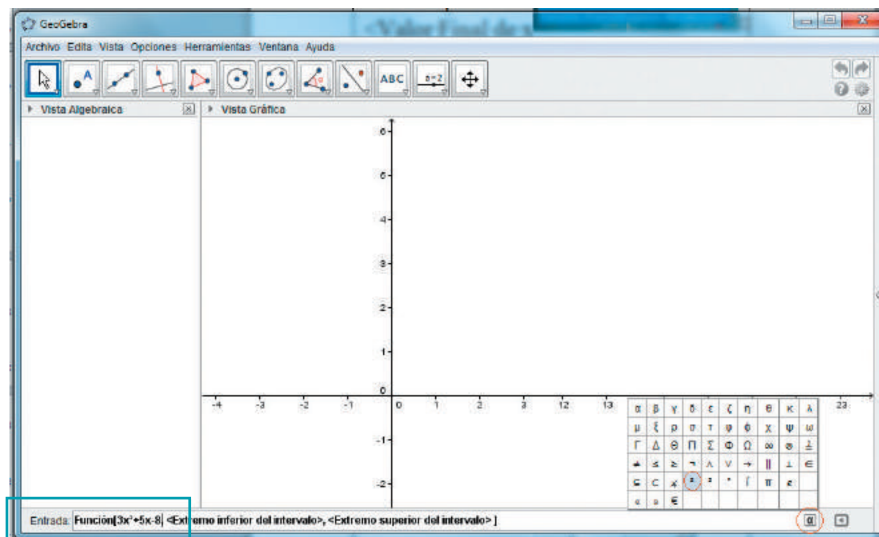
- En GeoGebra es posible trazar la gráfica de una función entre dos valores de x dados. Observa cómo trazar la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ para valores de x en el intervalo $[-3, 9]$.

En la barra de entrada, escribe la palabra Función (con acento) y selecciona la opción:

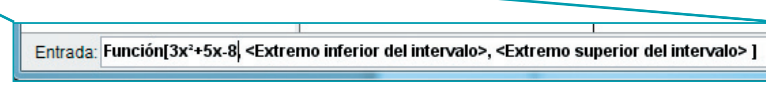
Función[<Función>, <Valor inicial de x>, <Valor final de x>]



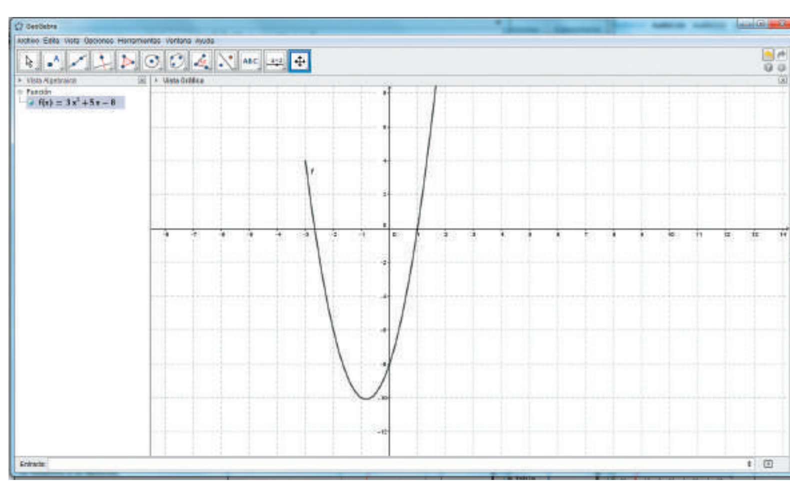
Reemplaza la expresión <Función> por $3x^2 + 5x - 8$. El exponente 2 se obtiene haciendo clic en el icono α de la barra de entrada y luego en el número 2 que se observa en el recuadro que se despliega allí.



Escribe el extremo inferior y superior del intervalo en el cual se va a trazar la gráfica de la función. La entrada debe quedar así como se muestra en el pantallazo.



Presiona la tecla Enter. En la vista gráfica de GeoGebra obtendrás la gráfica de la función en el intervalo $[-3, 9]$ que se muestra a la derecha.



Traza en GeoGebra la gráficas de la función, en el intervalo dado en cada caso.

a. $f(x) = x^2 + 3x + 3$ en $[1, 6]$

b. $f(x) = -2x^2 + x - 1$ en $[-3, 3]$

Destreza con criterios de desempeño: Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Sean los conjuntos A= {1,2,3,4} y B={5,6,7,8}

a. Determina el producto cartesiano A X B

b. Escribe el conjunto que se obtiene de la siguiente relación: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea par; represéntala en el plano cartesiano.

c. Escribe el conjunto que se obtiene de la siguiente relación: Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea igual a 1 o 2; represéntala en un diagrama sagital.

Comunicación

4 Observa la Tabla 7, donde se registra la temperatura de una persona a lo largo de un día.

Hora	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura (°C)	38	36	36,5	36	38	39	38

Tabla 7

a. ¿Cuál es la variable dependiente?

b. ¿Cuándo varió más la temperatura?

5 Escribe la fórmula del perímetro de un triángulo equilátero en función de su lado.

Razonamiento

6 Escribe la fórmula asociada a la Tabla 8.

x	−2	−1	0	1	2	6
y	−6	−3	0	3	6	18

Tabla 8

7 Observa los siguientes cuerpos geométricos.

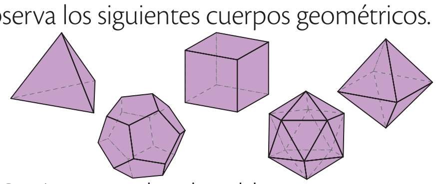


Figura 5

a. Copia y completa la Tabla 9.

	Vértices	Aristas	Caras
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Tabla 9

b. Escribe una fórmula que relacione el número de vértices, aristas y caras de estos cuerpos.

8 Lee, analiza y responde.

Un programa hace el siguiente proceso: al introducir un número lo eleva al cuadrado, luego multiplica por 3 el resultado y, por último, adiciona 1 al valor obtenido.

a. Justifica que el proceso descrito es una función.

b. Escribe una fórmula que describa el proceso.

9 Completa la Tabla 10 de la función que relaciona cada número entero con su cuadrado. Luego, resuelve.

x	−5	−2	−1	0	3	4
y						

Tabla 10

a. Escribe una fórmula para dicha función.

b. Representa gráficamente la función en tu cuaderno.

c. Explica si se deben unir los puntos obtenidos.

Ejercitación

10 Calcula el valor de a, si se sabe que una función tiene la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9).

Resolución de problemas

11 La Figura 6 representa una etapa ciclística. A cada distancia del punto de salida le corresponde una determinada altitud.

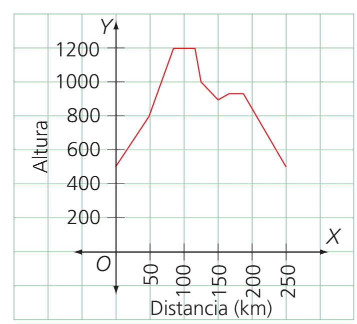


Figura 6

a. ¿Cuál es la variable independiente?

b. ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

12 La función para pasar una temperatura de grados Celcius (x) a grados Fahrenheit (y) es $y = 1{,}8x + 32$.

a. ¿Cuál es la variable independiente?

b. Copia y completa la Tabla 11, la cual relaciona ambas temperaturas.

x	−20	−10	0	20	30	50
y						

Tabla 11

c. Haz la representación gráfica de la función.

13 Dos frascos de duraznos cuestan $ 6,50.

a. ¿Cuál es la fórmula de la función que relaciona el precio con el número de frascos de duraznos comprados?

b. ¿Cuánto cuestan siete frascos de duraznos?

c. ¿Cuántos frascos pueden comprarse con $ 39?

7 Funciones de proporcionalidad directa

Explora

Yolanda quiere representar en un plano cartesiano la información registrada en la Tabla 1.

Cantidad de galones de gasolina	Precio ($)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tabla 1

- ¿Cuál es la expresión asociada a los datos de la tabla y qué tipo de gráfica se obtiene al representar dichos datos en el plano cartesiano?

Para representar la información de la tabla, Yolanda debe considerar las parejas ordenadas cuya primera componente es la cantidad de galones de gasolina y la segunda, el precio correspondiente. Así, las parejas que debe ubicar sobre el plano son (2), (4), (6), (8) y (10). Es preciso que ella use una escala adecuada para obtener una clara representación de los datos.

- El número de galones de gasolina y su costo son magnitudes directamente proporcionales. La razón de proporcionalidad es 2.
- La expresión algebraica que representa la situación es $y = 2 \cdot x$, donde x es el número de galones de gasolina y y es su precio en dólares.

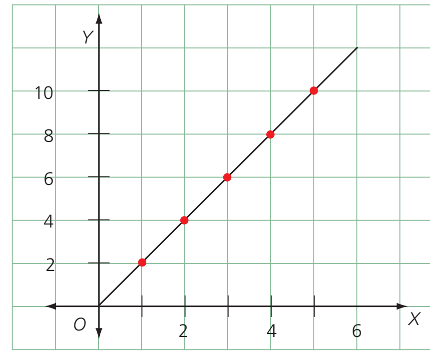


Figura 1

- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 1).

Las funciones que relacionan dos magnitudes directamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. Su fórmula es: $y = m \cdot x$

El valor de m corresponde a la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes que se relacionan.

Las gráficas de las funciones de tipo $y = m \cdot x$ son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Ten en cuenta

Las funciones de proporcionalidad directa también reciben el nombre de funciones lineales.



Figura 2

Ejemplo 1

Jorge compró un queso en el supermercado y leyó en la información de la etiqueta que cada kilogramo de queso cuesta $ 6.

Jorge establece que las magnitudes *Precio* y *Peso* son directamente proporcionales. Él representa con ***x*** el peso del queso en kilogramos y con ***y*** su precio en dólares, y relaciona las dos magnitudes mediante la expresión:

$$y = 6 \cdot x$$

Para hallar el precio de 2,5 kilogramos de queso, él reemplaza x por 2,5 y obtiene:

$y = 6 \cdot 2{,}5 = 15$. Así que 2,5 kilogramos de queso cuestan $ 15.

Jorge construye la Tabla 2 para trazar la gráfica de la función $y = 6 \cdot x$.

Peso (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Precio ($)	0	3	6	9	12	15

Tabla 2

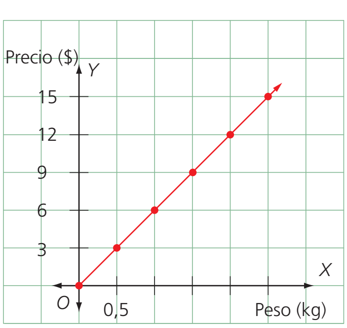


Figura 3

Una vez ubicados cada par de puntos de la tabla en el plano y unidos mediante una recta continua, Jorge obtiene una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 3).

En este caso, como no hay valores negativos de x, se considera solo la semirrecta que pasa por el primer cuadrante del plano cartesiano.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones lineales en Z, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Para preparar una torta, la receta indica que se añaden dos gramos de chocolate por cada gramo de harina que se emplee. Yanay va a hornear tres tortas y, para ello, ha amasado 60 g, 90 g y 100 g de harina, respectivamente.

a. ¿Qué cantidad de chocolate deberá añadir en cada caso?

b. Escribe la fórmula y haz la gráfica de la función que relaciona las distintas cantidades empleadas de harina y de chocolate.

Solución:

a. La cantidad de chocolate que hay que añadir es directamente proporcional a la cantidad de harina empleada, y la razón de proporcionalidad es 2. En la Tabla 3 se presentan algunos valores.

b. Si se llama x a la cantidad de gramos de harina y y a la cantidad de gramos de chocolate, la expresión que representa los datos de la tabla es $y = 2 \cdot x$.

La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 4).

Harina (g)	0	1	60	90	100
Chocolate (g)	0	2	120	180	200

Tabla 3

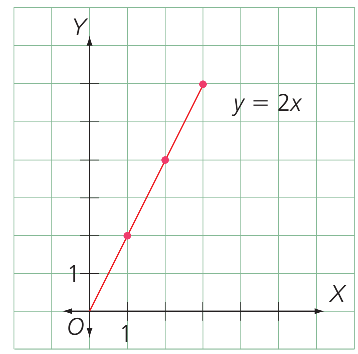


Figura 4

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Represента las siguientes funciones.

a. $y = x$ b. $y = -x$

c. $y = 4x$ d. $y = -4x$

Comunicación

3 Lee y resuelve.

a. El sueldo de un trabajador es de $ 10 por hora trabajada. Determina el sueldo del trabajador en función de las horas trabajadas.

b. Juan lee cuatro páginas diarias de un libro. Indica el tiempo que tarda en leer un libro en función del número total de páginas.

Modelación

4 Construye una situación que corresponda a la función asociada a la Tabla 4.

x	1	2	3	4	5
y	20	40	60	80	100

Tabla 4

5 Observa la Tabla 5, la cual muestra la distancia recorrida por un carro en un tiempo determinado a una velocidad constante de 85 km/h.

Tiempo	0	1	2	3	4
Distancia	0	85	170	255	340

Tabla 5

a. Representa los datos gráficamente.

b. Escribe la función que relaciona la distancia recorrida por el carro con el tiempo que tarda en alcanzarla.

Razonamiento

6 Escribe y representa la función que relaciona dos magnitudes cuya razón de proporcionalidad sea -3.

7 Escribe una función cuya razón de proporcionalidad sea una fracción. Luego, halla cuatro valores para trazar un bosquejo de la gráfica de la función.

8 Completa la Tabla 6 en tu cuaderno.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		-1				1

Tabla 6

a. Escribe la fórmula de la función que relaciona las dos magnitudes.

b. Representa gráficamente la función.

Resolución de problemas

9 En una frutería una manzana cuesta $ 0,40.

a. Haz una tabla de valores que exprese el precio de 1, 2, 3, 4 y 5 manzanas.

b. Representa gráficamente la función.

10 Un grifo de un tanque tiene un caudal de 6 dm^3 por minuto.

a. Construye una tabla de valores de la función tiempo–capacidad.

b. Representa gráficamente la función.

c. Halla la expresión algebraica de la función.

Practica Más

Números y letras

Comunicación

1. Expresa en lenguaje algebraico cada situación.

a. El perímetro de un cuadrado de lado *l*.

b. La cantidad de tornillos fabricados en *t* minutos si en 1 min se fabrican diez tornillos.

c. El costo del consumo de luz si se cobra por cada kilovatio/hora (kwh) $ 0,04 y se subsidia el 15% del consumo total.

d. El sueldo de un empleado que trabaja por horas, sabiendo que las horas de la jornada laboral ordinaria (h_1) se pagan a $ 4 y las extras (h_2), a $ 8.

Resolución de problemas

2. Una empresa encargada de la venta de boletería para distintos eventos cobra una comisión del 10% por la venta de entradas para una función. Con base en esta informa completa la Tabla 1.

Lugar	Precio por entrada	Comisión del 10%	Costo total
General	$ 30		
Preferencia	$ 40		
VIP	$ 80		

Tabla 1

Expresiones algebraicas

Resolución de problemas

3. El valor a pagar por el servicio de gas está dado por la expresión $0{,}5\,x + 1$, donde *x* es la cantidad de metros cúbicos de gas consumidos.

a. ¿Cuánto debe pagar al mes una familia que consume aproximadamente 8 m^3 de gas?

b. ¿Cuánto debe pagar si consume 12 m^3?

c. ¿Cuánto debe pagar si en un mes no consume gas?

d ¿Cuántos m^3 debe consumir si quiere pagar $ 4?

Ejercitación

4. Calcula el valor numérico de cada expresión algebraica, para el dato que se indica.

a. $2k - 2$, para $k = -2$

b. x^2, para $x = 2$ y $x = -2$

c. $b^2 + 2b$, para $b = 6$

d. $c^2 + 2c - 5$, para $c = -5$

e. $-g + 2h$, para $g = -1$ y $h = -6$

Funciones. Fórmulas, tablas y gráficas

Razonamiento

5. Completa las tablas 2 y 3. Luego, representa gráficamente cada función en tu cuaderno.

a.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x + 1$							

Tabla 2

b.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2 + 1$							

Tabla 3

Comunicación

6. Completa la Tabla 4 a partir de la Figura 1.

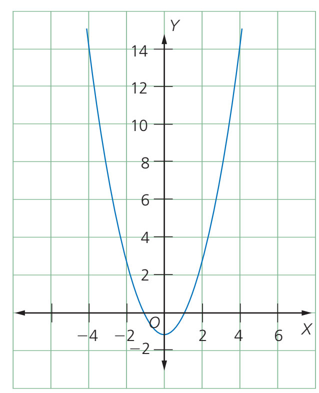


Figura 1

x	y
−4	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Tabla 4

Ejercitación

7. Completa la Tabla 5 que relaciona el radio de un círculo con su área. Luego, traza la gráfica en tu cuaderno.

Radio (cm)	1	2	3	4	5	9	12
Área (cm^2)							

Tabla 5

Resolución de problemas

8. En un estacionamiento se observa el siguiente letrero.

Tarifa para autos:
$ 0,40 por hora

a. Completa la Tabla 6.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	10	15
Valor ($)	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	4,00	6,00

Tabla 6

b. Determina si esta situación corresponde a una función o no.

c. Escribe la expresión algebraica asociada a esta situación y traza la gráfica correspondiente.

Resolución de **Problemas**

Estrategia: Plantear una expresión algebraica

Problema

Una compañía de telefonía celular cobra $ 2 de cargo fijo por llamada y $ 0,15 por minuto hablado.

a. Escribe una función que relacione el costo de una llamada con su duración.

b. ¿Cuánto debe pagar una persona por una llamada de 35 minutos de duración?

1. Comprende el problema

- ¿Qué significa la expresión "cargo fijo" en esta situación?

  R: El cargo fijo hace referencia al valor que se cobra en cada llamada sin importar su duración.

- ¿Cuál es el costo de un minuto?

  R: $ 0,15.

2. Crea un plan

- Plantea una expresión algebraica que relacione las variables de la situación y resuelve el problema empleando tal expresión.

3. Ejecuta el plan

- Identifica las variables de la situación:

  Variable independiente (t): Duración de la llamada

  Variable dependiente (C): Costo de la llamada

- Plantea la expresión algebraica asociada a la situación.

$$C(t) = 0{,}15\,t + 2$$

- Reemplaza la t por 35 y efectúa las operaciones necesarias para calcular el costo de una llamada de 35 minutos de duración.

$$C(t) = 0{,}15\,(35) + 2$$
$$C(t) = 5{,}25 + 2 = 7{,}25$$

R: Debe pagar $ 7,25.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que se debe pagar $ 5 por una llamada de 20 minutos de duración.

Aplica la estrategia

1. Un ciclista recorre 28 km en una hora. Si conserva siempre la misma velocidad, ¿cuál es la expresión algebraica asociada a la situación? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en siete horas?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Un horno aumenta su temperatura en 1,2 grados cada minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno cinco minutos después de haberlo encendido?

3. Las edades de Manuel y de Juan se pueden calcular mediante la expresión $2m + n$. La edad de Manuel se obtiene cuando $m = 3$ y $n = 7$ y la de Juan, cuando $m = 10$ y $n = 12$. ¿Cuál es la edad de cada uno?

4. Representa los puntos $A(3, 2)$, $B(10, 5)$ y $C(6,25)$ en el plano cartesiano. ¿Qué tipo de triángulo se obtiene al unir los puntos A, B y C?

5. La expresión $f(x) = 2\,000x + 8\,000$ permite calcular el costo total de producción de motores de avionetas. ¿Cuánto cuesta producir 70 motores?

Formula problemas

6. Inventa un problema que involucre los datos de la Tabla 1 y resuélvelo.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{x}{3} - 1$									

Tabla 1

8 Funciones de proporcionalidad inversa

Explora

David tiene varios grifos en su finca que vierten la misma cantidad de agua por hora. Uno solo de estos tarda 8 horas en llenar una piscina.

- ¿Cuál es la fórmula que expresa cómo obtener el tiempo de llenado de la piscina en función del número de grifos utilizados?

El número de grifos y el tiempo que tardan en llenar la piscina son magnitudes inversamente proporcionales. Si se representa con ***x*** el número de grifos y con ***y*** el número de horas que se tarda en llenar la piscina, se verifica que $x \cdot y = 8$. Por tanto, la fórmula que expresa el tiempo de llenado en función del número de grifos utilizados es:

$$y = \frac{8}{x}$$

Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se denominan **funciones de proporcionalidad inversa**. Su expresión algebraica es de la forma: $x \cdot y = k$, o bien, $y = \frac{k}{x}$. El valor de k corresponde a una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

Para representar la anterior función, que relaciona el número de grifos y el número de horas que tardan en llenar la piscina, se pueden seguir estos pasos.

1. Se construye la Tabla 1 de valores.

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1

Tabla 1

2. Como los productos de cada par de datos correspondientes siempre es 8, la constante de proporcionalidad es 8.

$1 \cdot 8 = 8 \qquad 2 \cdot 4 = 8 \qquad 4 \cdot 2 = 8 \qquad 8 \cdot 1 = 8$

Entonces, se verifica que $x \cdot y = 8$ o $y = \frac{8}{x}$.

3. Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano, se unen estos puntos con una línea curva. En la Figura 1 se presenta la gráfica correspondiente.

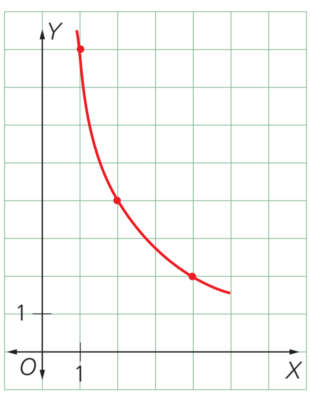


Figura 1

Ten en cuenta

En la ecuación $y = \frac{k}{x}$, correspondiente a una función de proporcionalidad inversa, la variable independiente se encuentra en el denominador; por ello, no puede tomar el valor 0.

Ejemplo 2

Un automóvil recorre una pista circular de 480 km a velocidad constante.

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, la razón de proporcionalidad es 480.

La Tabla 2 muestra cuánto tiempo emplearía el automóvil en recorrer la pista a una velocidad de 40, 60, 80 y 120 kilómetros por hora.

Velocidad (km/h)	40	60	80	120
Tiempo (horas)	12	8	6	4
Distancia (km)	480	480	480	480

Tabla 2

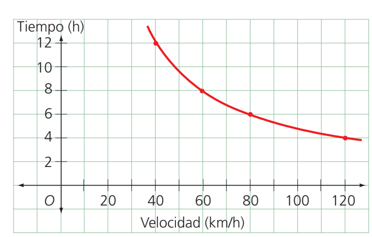


Figura 2

Si se llama x a la velocidad y y al tiempo, la fórmula que relaciona las dos magnitudes es $x \cdot y = 480$, o bien, $y = \frac{480}{x}$.

Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano, se unen los puntos con una línea curva, pues la velocidad varía en forma continua (Figura 2).

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones de proporcionalidad inversa en Z, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología

Actividad resuelta

Comunicación

1 Represente la función $y = \frac{4}{x}$ elaborando dos tablas de valores, una en la que solo tome valores positivos y otra en la que solo tome valores negativos.

Solución:

x	y
1	4
2	2
4	1

Tabla 3

x	y
−1	−4
−2	−2
−4	−1

Tabla 4

A partir de las tablas 3 y 4 se obtiene la gráfica de la Figura 3.

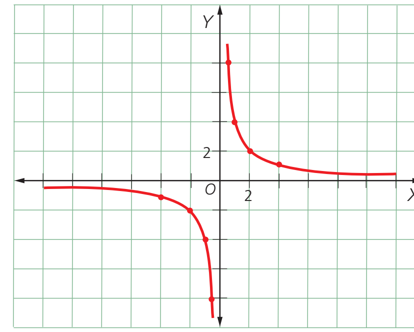


Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las funciones son de proporcionalidad inversa. Justifica tu respuesta.

a. $y = \frac{3}{2}x$ b. $y = -\frac{12}{x}$

c. $y = -x + 3$ d. $y = \frac{1}{x}$

3 Representa gráficamente la función $y = \frac{5}{x}$. Para ello, elabora dos tablas de valores, una con valores positivos de x y otra con valores negativos, y luego representa los puntos de ambas en los mismos ejes de coordenadas.

Comunicación

4 Escribe la función asociada a la siguiente situación:

Un curso de octavo EGB ha ganado un premio de $ 1 500

¿Cómo se distribuye el premio en partes iguales si hubiera 2, 3, 5, 10, 15, 30 o x estudiantes?

Razonamiento

5 Analiza. Un cliente encargó a Ricardo un corte de tela rectangular de 16 m^2.

a. ¿De cuántas formas diferentes puede cortar la pieza? ¿Qué relación hay entre los dos lados del rectángulo?

b. Si un lado mide 5 m, ¿cuánto medirá el otro lado?

c. Representa la función que relaciona los dos lados del rectángulo.

6 Representa la función $y = \frac{1}{x}$ elaborando una tabla de valores en la que x solo tome valores positivos y otra en la que solo tome valores negativos. ¿Qué relación hay entre las representaciones gráficas correspondientes a cada una de las tablas?

Resolución de problemas

7 Se quiere repoblar con 6 000 árboles una zona boscosa que sufrió un incendio forestal. Si se sabe que seis personas necesitan 120 horas para plantar todos los árboles, ¿cuántas horas hacen falta para plantarlos si colaboran 60 voluntarios?

a. Haz una tabla de valores que relacione el número de personas con el tiempo que tardan en plantar los árboles.

b. Dibuja la gráfica de la función y escribe su fórmula.

8 Una familia tiene un acuario y pretende alimentar durante 30 días a los 50 peces que viven allí. Para ello, compran un pedido de alimento.



a. Si cuando llega el pedido se dan cuenta de que son en realidad 75 peces, ¿cuánto tiempo les durará la comida?

b. ¿Cuál es la función que expresa la relación entre el tiempo que durará la comida y el número de peces del acuario?

9 El producto de dos números es 18.

a. Escribe la función correspondiente al enunciado.

b. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función asociada a la situación.

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Un taxímetro marca el costo de una carrera según la ecuación $C = 0{,}5 + 0{,}14t$ donde t es el tiempo en minutos de recorrido y C el costo en dólares. Si un recorrido dura 786 segundos, la tarifa a pagar es:

A. $ 1,33

B. $ 2,33

C. $ 8,34

D. $ 11,05

2. El triple de un número más sus tres cuartos, corresponde a la expresión:

A. $\frac{3}{4}+x$

B. $3x-\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{x}+\frac{3}{4}x$

D. $3x+\frac{3}{4}x$

3. Si p es falsa y q es verdadera, los valores de verdad de $p \vee \sim q$ y de $p \rightarrow q$, son respectivamente:

A. tautología–tautología

B. tautología–contradicción

C. contradicción–tautología

D. contradicción–contradicción

4. Diana elabora pan para vender, si vende cada unidad en 8 cts. y calcula que la inversión es de 3 cts. por cada pan, la expresión que permite obtener la ganancia G de Diana según el número de unidades vendidas x es:

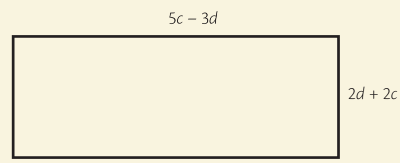
A. $G=(0{,}08 + 0{,}03)x$

B. $G=0{,}08x - 0{,}03$

C. $G=0{,}08 + 0{,}03x$

D. $G=0{,}08x - 0{,}03x$

5. El perímetro de la figura es:



A. $14c - 2d$

B. $14d + 2c$

C. $7c + d$

D. $7c - d$

6. Para $x = -3$, el valor numérico de la expresión $\frac{x^2}{x} - 3x + 5$ es:

A. 16

B. 11

C. –7

D. –2

7. Para $x = -2$, el valor numérico de la expresión $x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ es:

A. 3

B. –29

C. –13

D. –5

8. El cubo de la diferencia de dos números, corresponde a la expresión:

a. $x^3 - y$

b. $x - y^3$

c. $x^3 - y^3$

d. $(x - y)^3$

9. El 50% del producto de un número por las dos novenas partes del cuadrado del número. Corresponde a la expresión:

A. $0{,}5\left(x \cdot \frac{2}{9}x^2\right)$

B. $50\left(x \cdot \frac{2}{9}x^2\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{2}{9}x\right)^2$

D. $0{,}05\left(x^2 \div \frac{2}{9}x\right)$

Indicadores de logro:

- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones.
- Utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional en la solución de ejercicios.
- Expresa enunciados en lenguaje algebraico.
- Encuentra el valor numérico de una expresión algebraica.

10. El punto $(-5, -2)$ se encuentra en el:

A. primer cuadrante

B. segundo cuadrante

C. tercer cuadrante

D. cuarto cuadrante

11. El par ordenado que verifica la ecuación $y = -2x - 3$ es:

A. $(-2, -1)$

B. $(2, 1)$

C. $(2, -1)$

D. $(-2, 1)$

12. Las coordenadas del punto medio entre los puntos A $(-8, 4)$ y B $(4, 4)$ es:

A. $(-4, -4)$

B. $(-4, 4)$

C. $(4, -4)$

D. $(4, 4)$

13. En lenguaje matemático, el perímetro de un cuadrado de lado $2x - 8$ es:

A. $2(2x - 8)$

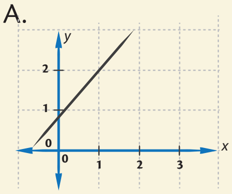
B. $(2x - 8)2$

C. $8x - 16$

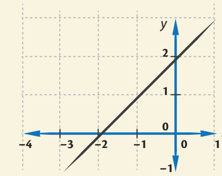
D. $8x - 32$

14. La gráfica de la función $y = x$ es:

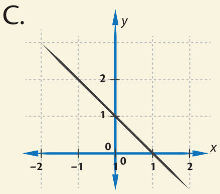
A.



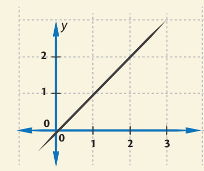
B.



C.



D.



15. La constante de una función inversa se obtiene:

A. multiplicando **x** y **y**

B. dividiendo **x** y **y**

C. sumando **x** y **y**

D. restando **x** y **y**

16. Si A = {2, 4, 6} y B = {2, 3}, el producto Cartesiano AXB, tiene:

A. 5 pares ordenados

B. 6 pares ordenados

C. 3 pares ordenados.

D. 2 pares ordenados

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Los beneficios de organizar un presupuesto

"Hacer un presupuesto es un buen inicio para planear a futuro"



Un presupuesto es una enumeración organizada de los ingresos y los gastos de una persona, familia, empresa o entidad, en un periodo de tiempo determinado.

Esta herramienta permite conocer con certeza las obligaciones y compromisos financieros, facilitando la posibilidad de ahorrar y fijar metas.

Es importante aclarar que un presupuesto es solamente un plan que posteriormente se puede comparar con lo que ocurre en la realidad y detectar aquellas áreas que puedan estar causando problemas; hacer este análisis es beneficioso, pues cada vez se puede planear de manera más acertada y elaborar presupuestos cada vez más cercanos a la realidad.

Presupuesto para un viaje

Para hacer un viaje se debe pensar en:

1 ¿Cuánto se va a gastar?

- Pasajes o gasolina
- Hospedaje
- Comidas

2 ¿Cuánto se debe ahorrar?

- Tiempo de ahorro
- Cantidad de dinero
- Fecha del viaje



Presupuesto empresarial

En el ámbito empresarial también es muy importante elaborar un presupuesto. El empreasio se debe preguntar:

- ¿Cuánto se piensa vender?
- ¿Qué se necesita hacer para lograrlo?
- ¿Cuánto se va a invertir?
- ¿Cuál será la ganancia?
- ¿Cuánto tiempo tomará?



Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1. Con ayuda de tus padres, identifica los gastos de tu familia. Para ello, deberán ser lo más rigurosos que puedan. Deben escribir los gastos fijos (arriendo o hipoteca, mensualidad escolar, impuesto de la vivienda y del auto, tarjetas de crédito, etc.), los gastos variables (transporte y gasolina, alimentación, aseo, servicios básicos, útiles de estudio) y los gastos extras (regalos, viajes, vacaciones, cines, entretenimiento, etc.).

2. Después de hacer este ejercicio, comenta con tus padres de qué manera consiguen ellos el dinero para suplir estas necesidades y realiza una reflexión en relación con la siguiente pregunta.

¿Cómo es posible que los niños ayudemos en el presupuesto de nuestra familia?

¿Cómo elaborar un presupuesto?

Un presupuesto se puede elaborar en una simple hoja o se puede usar un programa como Excel. En cualquiera de los casos es útil registrar la información en columnas de la siguiente manera:

Ingresos: allí se indican los ingresos personales o familiares, como: salario, trabajos extras, pensiones, ayudas o cualquier tipo de entrada de dinero que se tenga.

Gastos: allí se registran todos los gastos mensuales, diferenciándolos según su tipo así: obligatorios, necesarios y ocasionales.

	A	B	C	D	E
1	PRESUPUESTO				
2	Ingresos	Gastos			Comparación
3		Obligatorios	Necesarios	Ocasionales	
4					
5					
6					

Comparación: se deben comparar los totales de las dos columnas anteriores y es en esta en donde se logrará saber si hay un equilibrio entre lo que se gasta y lo que se recibe.

Obligatorios: son los gastos que no se pueden dejar de pagar ni varían, como la hipoteca, el arriendo de vivienda, cuotas de administración o los préstamos bancarios. Son gastos fijos que si no se pagan, las consecuencias pueden ser nefastas para la economía y la tranquilidad de la familia.

Necesarios: son gastos que se pueden reducir, pero no eliminar. Es lo que se gasta en servicios, como electricidad, agua y gas, comida y transporte. Son gastos necesarios para la vida diaria, pero se pueden reducir si se hace un consumo moderado de estos.

Ocasionales: son los gastos que se pueden reducir o eliminar, en caso de necesidad. Por ejemplo: comidas fuera de casa, un nuevo teléfono móvil, viajes, cursos extras, etc.

Para tener en cuenta...

Cuando se conoce anticipadamente cuánto se gana y cuánto se gasta, es posible tomar mejores decisiones financieras: establecer prioridades y definir cuál es la mejor manera para alcanzar las metas. Es muy posible que al hacer un presupuesto se vea que son más los gastos que el dinero que se recibe. En tal caso, es necesario buscar estrategias para reducir los gastos y alcanzar el equilibrio financiero. Si, por el contrario, los ingresos superan los gastos, es posible establecer un plan de ahorro.

Pregunta tipo Saber

Observa la tabla en la que se registran los ingresos y los gastos de la Familia Hernández.



Ingresos	
Salario 1	$ 1 100
Salario 2	$ 800
Ventas	$ 200
Gastos	
Hipoteca	$ 1 000
Servicios	$ 250
Educación	$ 200
Mercado	$ 600

En relación con el presupuesto de esta familia se puede decir que:

A. le falta aproximadamente $ 50 para cubrir sus gastos.

B. sus ingresos y sus gastos son iguales.

C. podría ahorrar $ 50 mensuales.

D. le sobran $ 100 cada mes.

Trabajo en grupo

Administración de recursos

3. Imaginen que van a organizar una fiesta para celebrar el cumpleaños de un compañero. Elaboren el presupuesto para este evento, teniendo en cuenta los siguientes aspectos.
   a. ¿A cuántas personas se va a invitar?
   b. ¿Cuánto cuesta la comida que se va a ofrecer?
   c. ¿Cuánto cuesta el pastel que se escogerá?
   d. ¿Cuánto se invertirá en las bebidas?
   e. ¿Cuánto costará el alquiler del lugar para la fiesta?
4. Piensen de qué manera podrán obtener los recursos para este evento y registren las cantidades de dinero que podrán conseguir.
5. Describan estrategias que les permitan ahorrar en los gastos de la fiesta.
6. Elaboren el respectivo presupuesto y revísenlo con tu profesor.
7. Escriban conclusiones sobre la importancia de la elaboración de un presupuesto.

Habilidades digitales

Usa una animación para comunicar tus ideas

Organiza la información de fuentes confiables a través de videos cortos, elaborados con PowToon. Esta es una gran herramienta para presentar ideas de manera concreta, animada, llamativa y divertida. En este taller aprenderás a comunicar tus ideas con PowToon.

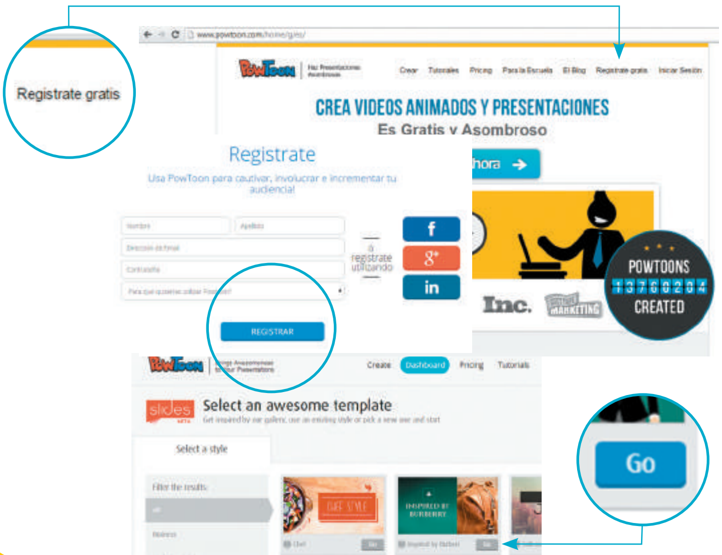
1 Ingresa a la página www.powtoon.com

a. Usa la opción "Regístrate gratis".

b. Realiza el registro usando tu cuenta de Gmail. (Si no tienes correo electrónico con Gmail, puedes abrirlo en www.gmail.com).

c. Oprime el botón Create.

d. Selecciona un formato para tu animación, oprime el botón Go y haz el tutorial para aprender las herramientas principales.



2 Consulta y responde el siguiente interrogante:

¿Cómo saber la probabilidad de ganarse la lotería?

a. Escoge fuentes confiables en la web (páginas, blogs, libros digitales, entre otros). Recuerda que una fuente es confiable si proviene de personas o entidades reconocidas. Entonces, identifica el autor o autores del sitio web.

b. Elabora un guion corto, con personajes y diálogos, para responder la pregunta.

3 Crea tu video animado

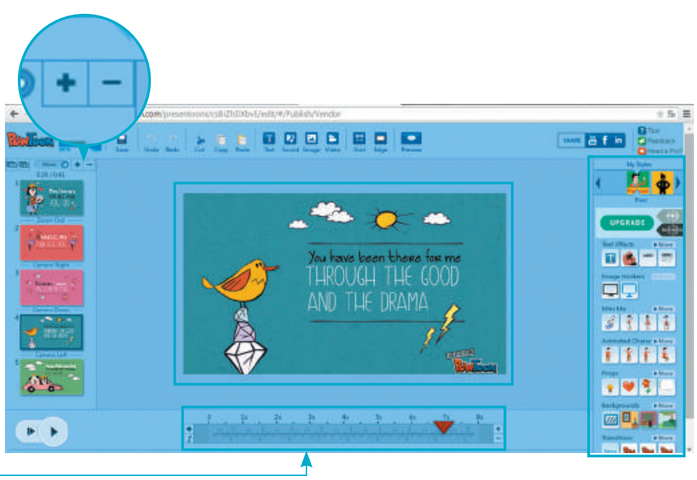
a. Reconoce la ventana de PowToon.

b. Añade o elimina tantas escenas como necesites.

c. Acomoda el escenario entre personajes y utilería.

d. Adiciona personajes, utilería, botones, textos, animaciones.

e. Controla el momento en el que cada objeto aparece en escena.

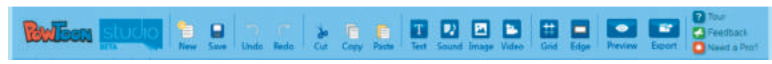


4 Edita tu animación

a. Reconoce la barra de herramientas.

b. Guarda regularmente tu trabajo.

c. Modifica cada una de las escenas que quieres compartir. Es preferible no tener una animación de más de cinco escenas y no usar muchos personajes animados.



d. Usa la barra de tiempo para sincronizar los textos, personajes, sonidos y animaciones.

e. Coloca los textos necesarios para responder a la actividad planteada.

5 Comparte tu video

a. En la barra de herramientas, utiliza el botón Export.

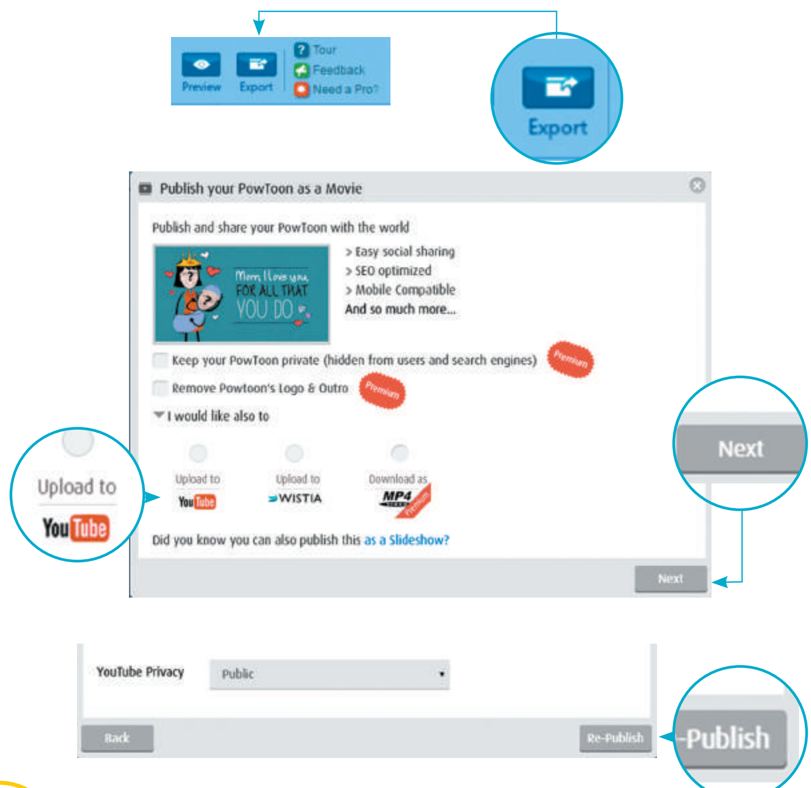
b. Selecciona la opción "Upload to YouTube" y oprime el botón Next.

c. En la nueva ventana, ingresa los datos de tu cuenta de Gmail: son los mismos de tu cuenta de YouTube.

d. Selecciona la calidad estándar de video.

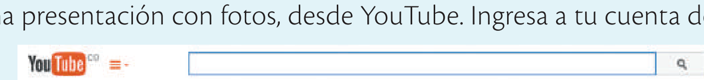
e. Llena el formulario sobre categoría, título, descripción y privacidad y oprime el botón Publicar.

f. Comparte el enlace con tus compañeros de clase, por medio de tu correo electrónico.

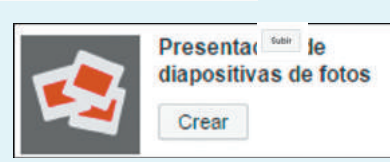


Aprende más

a. Inserta en tu video de PowToon una presentación con fotos, desde YouTube. Ingresa a tu cuenta de YouTube con tus datos de Gmail y selecciona la opción "Subir".



b. En la nueva pantalla selecciona la opción "Presentación de diapositivas de fotos". Escoge las fotografías que desees desde tu computadora. Usa la barra de herramientas de PowToon para insertar este nuevo elemento.



Evaluación de la unidad

Números y letras

Comunicación

1. Expresa en lenguaje matemático las situaciones registradas en la siguiente tabla.

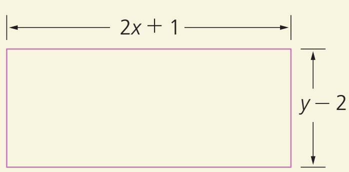
Situación	Lenguaje matemático
El perímetro de un cuadrado de lado x.	
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	
El precio de x juguetes a **$** 10,00 cada uno.	
El salario de un vendedor de tarjetas corresponde a un básico de **$** 360 más **$** 5,00 por cada tarjeta vendida.	
El valor a pagar en un estacionamiento es **$** 5,00 de básico más **$** 1,00 por cada hora que transcurra.	

Expresiones algebraicas

Ejercitación

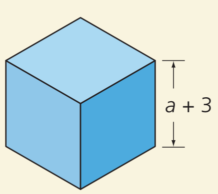
2. Selecciona la expresión algebraica correspondiente a cada situación.

a. El perímetro del rectángulo.



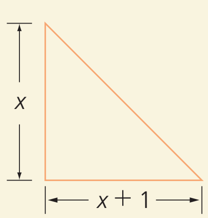
$P = 2(2x + 1) + 2(y - 2)$ $\quad$ $P = (2x + 1) + (y - 2)$

b. El volumen del cubo.



$A = (a + 3)^3$ $\quad$ $A = 6 \cdot (a + 3)$

c. La hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



$h = \sqrt{x^2 + (x + 1)^2}$ $\quad$ $h = 2x^2 + (x + 1)^2$

Valor numérico de una expresión algebraica

Ejercitación

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, para los datos que se indican.

a. $x^3 + 4$, para $x = 3$

b. $2x^2 - x^3$, para $x = -5$

c. $3x + 2y + z$, para $x = 1$, $y = 3$ y $z = 4$

d. $2a^3 + 3b^2 - ab$, para $a = -2$ y $b = 2$

e. $4z^4 - 3z^2 + 5z^3$, para $z = 3$

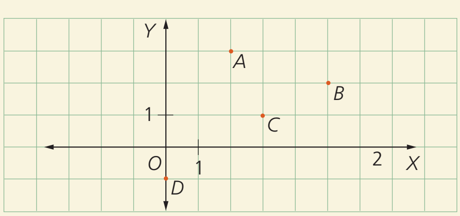
4. Calcula el valor numérico de la expresión $y = 3x^2 - 2x$ para cada valor de x. Haz las relaciones correspondientes.

a. $x = 2$	( ) 33
b. $x = -1$	( ) $\frac{7}{4}$
c. $x = 0$	( ) 21
d. $x = -3$	( ) $-\frac{1}{4}$
e. $x = 3$	( ) 8
f. $x = \frac{1}{2}$	( ) 5
g. $x = -\frac{1}{2}$	( ) 0

Sistema de coordenadas cartesianas

Ejercitación

5. Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C y D que aparecen en el siguiente plano cartesiano.



Comunicación

6. Representa en un plano cartesiano las figuras cuyas coordenadas de los vértices son las que se dan en cada caso.

a. Un cuadrado cuyos vértices son $(2, 1)$, $(6, 1)$, $(6, -3)$ y $(2, -3)$.

b. Un triángulo cuyos vértices son $(4, 2)$, $(-2, 0)$ y $(1, 4)$.

Indicadores de logro:
- Representa pares ordenados en el plano cartesiano.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones.
- Utiliza conectivos lógicos y la lógica proposicional en la solución de ejercicios.
- Expresa enunciados en lenguaje algebraico.
- Encuentra el valor numérico de una expresión algebraica.

Funciones

Razonamiento

7. Una función asigna a cada número entero el resultado de elevarlo al cuadrado y multiplicarlo por 3.

a. Escribe la fórmula de la función.

b. Calcula $f(5)$ y $f(12)$.

c. Representa gráficamente la función, en tu cuaderno.

8. Realiza una representación gráfica de la función asociada a la siguiente tabla en la que figuran algunos valores de la función (considera a x real).

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	1	−2	−3	−2	1	6

9. Determina si las funciones asociadas a las siguientes situaciones son crecientes o decrecientes.

a. Juan paga $ 4,00 por cada paquete de galletas que compra en la tienda.

b. Duración de una construcción según el número de trabajadores.

c. Número de tornillos de iguales características, fabricados en un tiempo determinado.

Resolución de problemas

10. En la tabla se registra la distancia recorrida por un automóvil y el tiempo empleado en recorrerla a una velocidad constante.

Distancia recorrida (km)	Tiempo empleado (h)
40	1
80	2
120	3
160	4
200	5
240	6

a. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

b. Si el automóvil empleó 10 h en un recorrido, ¿cuántos km recorrió?

c. ¿Cuál es la función asociada a la situación?

Funciones de proporcionalidad directa e inversa

Resolución de problemas

11. Un centro de modas lleva un control de la cantidad de la tela que utiliza en la confección de camisetas.

Cantidad de tela (m)	Camisetas confeccionadas
3	7
6	
9	
12	
15	
18	

a. Completa la tabla.

b. Escribe la fórmula de la función que relaciona las dos magnitudes.

c. ¿Cuántos metros de tela se requieren para confeccionar 112 camisetas?

d. Determina si la función es creciente o decreciente.

e. Representa gráficamente en tu cuaderno la función.

Proposiciones y conectivos lógicos

Ejercitación

12. Marca Sí, si el enunciado es una proposición simple o No, en caso contrario.

a. Hoy es un día muy caluroso — Sí — No

b. ¡Ganamos! — Sí — No

c. $324 + 123 + 10 = 563$ — Sí — No

d. 9 es un número primo — Sí — No

13. Escribe las proposiciones que se piden a continuación, si se sabe que:

p: La casa es de color rojo

q: El televisor es grande

r: Juan juega baloncesto

s: Mario estudia matemáticas

a. $(\sim s \vee \sim r) \rightarrow \sim q$

b. $(s \wedge r) \rightarrow p$

c. $(p \vee r) \rightarrow s$

d. $(q \wedge p) \rightarrow \sim q$

Análisis de prejuicios sobre las diferencias



Competencias ciudadanas

- Identifico y rechazo las diversas formas de discriminación en mi medio escolar y en mi comunidad y analizo críticamente los motivos que pueden alentar estas discriminaciones.

Acércate al tema

- Los pueblos indígenas, las poblaciones afroecuatorianos y los mestizos poseen cada uno de ellos prácticas y costumbres propias de su cultura que muchas veces son censuradas por otros grupos étnicos o sociales y esto genera exclusión económica, política, cultural, simbólica y social.





Son varios los prejuicios negativos que afectan primordialmente a los grupos minoritarios étnicos, mujeres, niños y jóvenes en situación de riesgo, personas en condición de desplazamiento y muchos otros.

Los prejuicios	Son conceptos o juicios de valor sobre hechos o personas que se hacen de manera anticipada, antes de conocerlos, y pueden ser favorables o desfavorables.
	Implican una forma de pensar que se encuentra relacionada con comportamientos o actitudes que se consideran de discriminación.
	Se establecen a partir de creencias basadas en las costumbres, tradiciones o mitos que se adjudican a determinado grupo.
	La mayoría surgen por conveniencia, con el objetivo de discriminar, dominar o descartar a otras personas o, por el contrario, aceptarlas sin reflexionar sobre cómo son en realidad.

Actividades

1. ¿Qué sabes sobre el modo de vida de los pueblos indígenas de tu país?
2. ¿Conoces a personas desplazadas por la violencia? ¿Cómo viven?
3. ¿Has sido víctima de prejuicios por parte de tus compañeros del colegio? Coméntalo con el grupo.

¿Tú qué harías?



¿Has reflexionado sobre el valor que tienen las diferencias de los grupos étnicos de nuestro país? Es tu deber identificar la riqueza que posee un pueblo gracias a la diversidad cultural y analizar los prejuicios que las personas tienen acerca de esa diversidad cultural.

En este proyecto usarás el cine club como una herramienta pedagógica para mostrarle a la comunidad educativa un **análisis sobre los prejuicios,** principalmente negativos, ya que estos son la base de la discriminación.

Desarrolla el plan de trabajo

Trabajo individual

Indaga en diferentes fuentes y analiza y compara la información que encuentres para responder las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se forman los prejuicios?
- ¿Cómo se puede manifestar la discriminación?
- ¿Qué consecuencias trae la discriminación?
- ¿En tu colegio hay manifestaciones de discriminación?
- ¿Perteneces a algún grupo susceptible de ser discriminado?

Trabajo en grupo

- Forma un grupo de trabajo con algunos de tus compañeros de clase. Consulten en qué consiste el cine club, entendido como estrategia pedagógica para abordar algunas temáticas en el aula clase.
- Realicen una lista de posibles películas que podrían proyectar en el cine club. Tengan en cuenta la edad apta para el público y seleccionen las películas a partir de dicho criterio. Algunos títulos pueden ser: *A las cinco de la tarde, Mi pie izquierdo, Philadelphia, El color del paraíso, La vida es bella, Las tortugas también vuelan, Un amor muy especial, Historias cruzadas*.
- Distribuyan las películas preseleccionadas entre los miembros del equipo de trabajo, de manera que cada miembro vea una y elabore una sinopsis y una ficha sobre los aspectos a tener en cuenta para el análisis y la reflexión acerca de los prejuicios y la discriminación. De acuerdo con el informe que haga cada uno sobre la película que vio, realicen la selección final de la película que proyectarán en el cine club.
- Establezcan y definan la publicidad para promocionar la película que vayan a proyectar.
- Cada grupo debe analizar qué recursos requiere para la realización del proyecto, ya sean económicos, humanos, técnicos o tecnológicos (proyector de video, película, sonido, publicidad, otros).
- Inviten a algún experto que domine el tema para que enriquezca la reflexión y el análisis después de la proyección de la película.

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Trabaja con el área de matemáticas

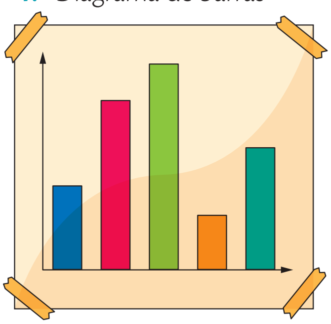
Las matemáticas te brindan herramientas para comparar e interpretar datos provenientes de diferentes fuentes, de manera que cuando participes en una mesa redonda ofrezcas argumentos y no opiniones.

Organiza la respuesta a cada uno de los interrogantes del trabajo individual en tablas y gráficas que te ayuden a sustentar tus argumentos cuando participes en la mesa redonda.

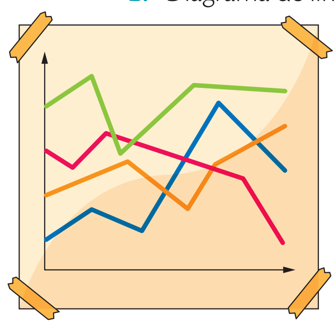
a Gráficas estadísticas

Las gráficas estadísticas presentan información procedente de diferentes fuentes de forma clara, precisa y ordenada, para ayudar a analizar la información.

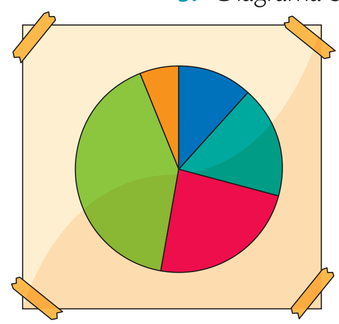
1. Diagrama de barras



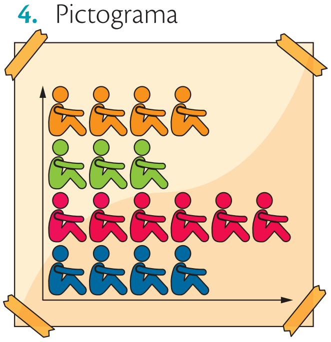
2. Diagrama de líneas



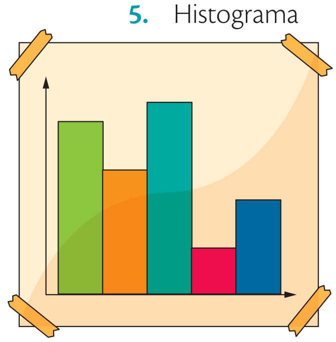
3. Diagrama circular



4. Pictograma



5. Histograma



b Tablas de frecuencias

En estas tablas se clasifican y organizan los datos recogidos en un estudio estadístico.

Película favorita	Conteo	Frecuencia
Película 1	///// ///// ////	14
Película 2	///// ///// ///// //	17
Película 3	///// //	7
Película 4	///// ///// ///// /	16
Película 5	///	3



Da a conocer tu trabajo

Presentarás los resultados de tu trabajo en dos espacios: primero en el cine club para sensibilizar sobre los prejuicios, la discriminación y sus consecuencias y después se realizará una mesa redonda con todos tus compañeros de clase, donde podrás expresar tu posición frente al tema.

- El cine club:
  1. Los representantes de cada grupo deben solicitar al colegio el permiso para proyectar las películas, traer a los posibles expertos e invitar a otros cursos al cine club. Incluso, pueden proponer que los padres de familia puedan asistir a las diferentes fechas del cineclub.
  2. Cada grupo debe promocionar su presentación y distribuir la publicidad correspondiente.
  4. Al final de cada película, se debe abrir un espacio de conversación donde se recojan los puntos de discusión que se hayan presentado y, con la orientación del profesor o profesores, se despejen interrogantes.
  5. Cada grupo debe participar en las proyecciones de los demás grupos y realizar una evaluación sobre el trabajo realizado por sus compañeros.
- La mesa redonda:
  1. El tema de la mesa redonda versará sobre los prejuicios y la discriminación que se presentan en el Ecuador hacia la población considerada como vulnerable, como los grupos minoritarios étnicos, mujeres, niños y jóvenes en situación de riesgo y personas en condición de desplazamiento, entre otros.
  2. El profesor nombrará un moderador y un secretario para la actividad. El secretario registrará las diferentes intervenciones de los estudiantes y al final del ejercicio leerá las conclusiones a las que haya llegado el grupo.
  3. El moderador dará la palabra a los estudiantes, de modo que se alternen los puntos de vista opuestos y se argumente con base en los datos estadísticos recopilados.
  4. Al finalizar la participación, se abrirá un espacio para aclarar, especificar y ampliar los argumentos y sacar las conclusiones de la discusión.

Evalúa el trabajo realizado

Elabora conjuntamente con el profesor una rúbrica o matriz de evaluación previa a la realización del proyecto y una vez terminada la mesa redonda evalúa junto con tu profesor y compañeros según los criterios de valoración establecidos.

Comprométete

De acuerdo con tu trabajo en este proyecto, amplía la lista de los compromisos que harás para evitar la discriminación en tu entorno.

1. Respetaré el derecho que tienen todos mis compañeros a ser diferentes.
2. Conoceré primero a las personas antes de juzgalas, para no discriminarlas.
3. ....
4. ....

Evaluación Final

1. Si el período de vida del César Augusto, emperador romano fue de 63 a.C. – 14 d.C., entonces el tiempo en años que ha transcurrido desde su nacimiento hasta el 2015 es de:

   A. 1952

   B. 2001

   C. 2029

   D. 2078

2. El período de vida de Cristóbal Colon fue de 1451–1506 y de Galileo Galilei 1564–1642. El tiempo transcurrido en años entre la muerte del primero y el nacimiento del segundo es de:

   A. 191

   B. 113

   C. 136

   D. 58

3. Debido a un accidente, una persona es ingresada a un hospital por emergencias el lunes a las 5 am y sale del hospital el miércoles a las 7 pm. Las cantidad de horas que permaneció hospitalizada fue de:

   A. 62

   B. 58

   C. 51

   D. 50

4. Al resolver $(-5) -(-12) + (-6) -(-2)-(-3)$, se obtiene:

   A. -28

   B. -18

   C. -14

   D. 6

5. Los siguientes números ordenados de mayor a menor son:

   A. $-404; -390; -289; -305$

   B. $-645; -652; -665; -679$

   C. $-277; -259; -254; -227$

   D. $-68; -66; -71; -76$

6. Si Nueva Deli está en el huso horario +5 y son las 20h00, entonces la hora en Río de Janeiro que está en el huso horario −3 es:

   A. 14H00

   B. 13H00

   C. 12H00

   D. 11H00

7. $-[-(3+5)+2+(-1+|-7|)]=$

   A. 1

   B. 0

   C. -1

   D. -2

8. Si $(9x + 8) - (4x - 5) = 3x - 11$, el valor de x es:

   A. 2

   B. 1

   C. -1

   D. -2

9. Si $4x -1 > 3x + 4$, entonces:

   A. $x > 5$

   B. $x > 3$

   C. $x > \frac{5}{7}$

   D. $x > \frac{3}{7}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

10. Si $7x + 7 < 3x + 23$, entonces:

A. $x < 20$

B. $x < 30$

C. $x < 4$

D. $x < 3$

11. Si $-[3x-(2 + x) + 3] = 5 + x$, entonces x es:

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

12. Para $4 (x -4) - 2 (2x +3) >- (2x + 2)$:

A. $x > 6$

B. $x > 8$

C. $x > 10$

D. $x > 12$

13. Eduardo es mayor que Rafael. Gustavo es menor que Alfredo y Rafael es mayor que Alfredo. El menor de los cuatro es:

A. Rafael

B. Gustavo

C. Alfredo

D. Eduardo

14. Un ciclista se mueve a 4 metros por cada segundo. El ciclista recorrerá 6000 metros en:

A. 20 minutos

B. 25 minutos

C. 30 minutos

D. 35 minutos

15. Mónica compra 3 docenas de espejos en $ 18, para vender cada espejo en $ 1,50. Si se rompieron 6 espejos, Mónica ganó en el total de la venta:

A. $ 27

B. $ 30

C. $ 35

D. $ 39

16. Cristina invierte $ 25 para elaborar 100 empanadas, si en cada empanada la ganancia es de $ 0,30, el total de la venta de las 100 empanadas es de :

A. $ 47

B. $ 50

C. $ 55

D. $ 60

17. Un comerciante compra 1200 gallinas en $ 4200, si en el transporte mueren 40 gallinas. Para obtener una ganancia de $ 1600, el comerciante debe vender cada gallina en:

A. $ 4,00

B. $ 4,50

C. $ 5,00

D. $ 5,50

18. Cuatro hermanos compran un televisor en $ 1182, un refrigerador en $ 950, una cocina en $ 720 y un microondas en $ 100. El monto total lo pagarán por partes iguales en 36 mensualidades. Cada hermano debe aportar mensualmente:

A. $ 22,00

B. $ 21,50

C. $ 21,00

D. $ 20,50

Tabla de respuestas

10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

19. El resultado de la operación
$8 + 30 \div 6 + 2 - 6 \cdot 3 + 4 - 10$ es:

A. 10

B. 5

C. −9

D. −12

20. El resultado de la operación:
$(4-7) \cdot (-3 + |-5+3| - 1) \div (3 \cdot 1)$ es:

A. 3

B. 2

C. −2

D. −3

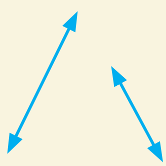
21. Las rectas que se muestras son:

A. paralelas

B. perpendiculares

C. secantes

D. adjuntas



22. La relación que existe entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado es:

A. directamente proporcional

B. inversa

C. cuadrática

D. lineal

23. Sean los conjuntos A= {1,2} y B={5,6,}, el producto cartesiano A × B, es:

A. {(1,5),(1,6),(2,5),(2,2)}

B. {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)}

C. {(1,5),(1,1),(2,5),(2,6)}

D. {(1,5),(1,1),(2,5),(2,2)}

24. El valor de x en la ecuación $1 + 4x - 3 = 6x + 8$, es:

A. – 5

B. 4

C. – 4

D. 5

25. La suma de dos números enteros consecutivos es 35. La ecuación que se debe plantear para encontrar los números es:

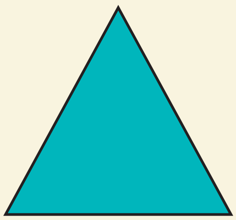
A. $3x - 1 = 34$

B. $2x = 36$

C. $2x + 1 = 35$

D. $2x + x = 35$

26. El triángulo equilátero de la figura, tiene:



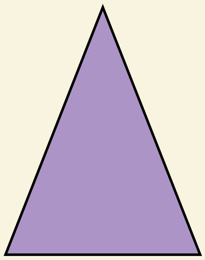
A. 1 línea de simetría

B. 2 líneas de simetría

C. 3 líneas de simetría

D. no tiene líneas de simetría

27. El triángulo isósceles de la figura, tiene:



A. no tiene líneas de simetría

B. 3 líneas de simetría

C. 2 líneas de simetría

D. 1 línea de simetría

Tabla de respuestas

19	20	21	22	23	24	25	26	27
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

28. El número de aristas para un cuerpo de 6 caras y 8 vértices es:

A. 14

B. 12

C. 10

D. 8

29. La expresión $\frac{\left[\left(-3^2 \cdot -3^3\right)\right]^{-2} \cdot \left(-3^{10}\right)}{\left(-3^5\right) \div \left(-3^5\right)}$ simplificada es igual a:

A. 1

B. −1

C. 3

D. −3

30. Si m = −2, p = −7 y q = −10, entonces el valor de (2m)·(p − q) es:

A. 12

B. 10

C. −10

D. −12

31. La expresión $\frac{\left[\left(5^{-2} \cdot 5^3\right)\right]^{-2} \cdot \left[\left(5^{-2} \cdot 5\right)\right]^2}{\left(5^{-2}\right) \cdot \left(5^{-3}\right)}$ simplificada es igual a:

A. 0

B. 5

C. $\frac{1}{5}$

D. 25

32. El valor de $16^{\frac{3}{2}}$ es:

A. 4

B. 8

C. 64

D. 243

33. El valor de $\left(\frac{16}{81}\right)^{0,25}$ es:

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

34. El área lateral de un cilindro de diámetro de la base 6 cm y altura 15 cm es:

A. 90 π cm²

B. 180 π cm²

C. 45 π cm²

D. 60 π cm²

35. El área total de un cilindro de 10 cm de diámetro y 20 cm de la altura es:

A. 90 π cm²

B. 180 π cm²

C. 200 π cm²

D. 250 π cm²

36. La generatriz de un cono de 60 cm de diámetro y 50 cm de altura es de:

A. 40,0 cm

B. 58,3 cm

C. 73,8 cm

D. 78,1 cm

37. A la presentación de un libro se invitan a 600 personas de las que asisten tres quintas partes y de ellas, un doceavo no se quedó a toda la participación. El número de personas que estuvieron durante todo el programa de presentación fue de:

A. 400

B. 360

C. 330

D. 300

Tabla de respuestas

28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Evaluación Final

38. El resultado de $\frac{1}{5} + 0{,}25 - 0{,}4 + \frac{4}{20}$ es:

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

39. El resultado de la operación

$\frac{1}{3} - 0{,}222... + 0{,}666... + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}$ es:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $-\frac{2}{9}$

D. $-\frac{2}{3}$

40. En un recipiente caben $\frac{5}{9}$ de litro de leche, con 50 litros de leche se pueden llenar:

A. 10 recipientes

B. 30 recipientes

C. 40 recipientes

D. 90 recipientes

41. De 30 estudiantes de escuela a $\frac{1}{6}$ parte le gusta leer, a $\frac{1}{5}$ parte le gusta dibujar y a $\frac{2}{15}$ le gusta escribir cuentos. El número de estudiantes que no hace ninguna de estas tres actividades es:

A. 15

B. 13

C. 12

D. 10

42. Los $\frac{2}{3}$ de 93 disminuidos en su mitad es:

A. 64

B. 46

C. 36

D. 31

43. Los 40 estudiantes de un curso planifican su paseo de fin de año, $\frac{3}{8}$ del curso quieren ir a Esmeraldas, $\frac{3}{10}$ a Manta y $\frac{1}{5}$ a Salinas. El número de estudiantes que están indecisos es:

A. 8

B. 3

C. 5

D. 9

44. El número de triángulos en que se puede descomponer un polígono convexo de 26 lados es:

A. 24

B. 20

C. 18

D. 14

45. El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 6 lados es:

A. 3

B. 4

C. 6

D. 9

46. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es de:

A. 180º

B. 270º

C. 360º

D. 420º

Tabla de respuestas

38	39	40	41	42	43	44	45	46
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

47. La tabla de verdad de la proposición compuesta $p \vee \sim p$, es:

A.

p	$\sim p$	$p \vee \sim q$
V	F	F
F	V	V

B.

p	$\sim p$	$p \vee \sim q$
V	F	V
F	V	V

C.

p	$\sim p$	$p \vee \sim q$
V	F	V
F	V	F

D.

p	$\sim p$	$p \vee \sim q$
V	F	F
F	V	F

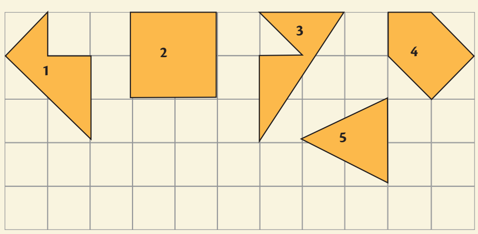
48. Son polígonos convexos:

A. 1,2,3

B. 2,3,4

C. 3,4,5

D. 2,4,5



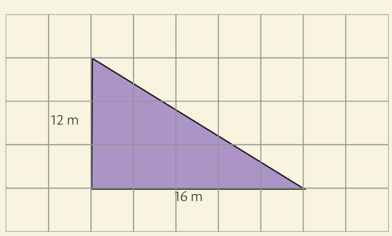
49. La hipotenusa del triángulo mide:

A. 24 m

B. 20 m

C. 18 m

D. 16 m



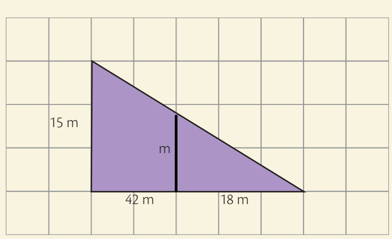
50. La longitud del lado m es:

A. 6,4 m

B. 4,5 m

C. 4,0 m

D. 3,8 m



51. Un árbol de 11,8 m se parte en dos, de forma que el tronco de la base de 4,5 m y el tronco superior de 7,3 m forman un triángulo rectángulo cuya base mide:

A. 5,7 m

B. 3,0 m

C. 3,4 m

D. 2,7 m

52. La moda de los datos 6, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 4 es:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

53. La media aritmética de 120, 134, 135, 137, 123, 156, 243 es:

A. 149,7

B. 134,1

C. 132,5

D. 126,5

54. Para 34, 37, 45, 25, 56, 40, la desviación media del segundo dato es:

A. 0,5

B. 2,5

C. 5,5

D. 16,5

55. La mediana de 14, 16, 17, 15, 11, 18 es:

A. 16

B. 15

C. 15,5

D. 14,5

Tabla de respuestas

47	48	49	50	51	52	53	54	55
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

Evaluación Final

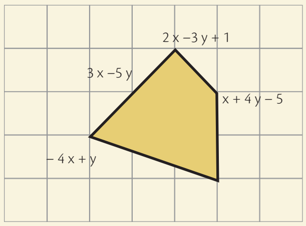
56. El perímetro de la figura es:

A. x −2y +6

B. 2x − 2y − 6

C. 2x − 3y − 4

D. x + 2y − 6



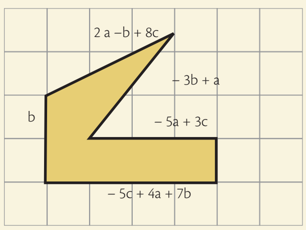
57. El perímetro de la figura es:

A. 2a + 4b + 6c

B. 11a − 7b +c

C. 4a + 4c

D. 8a + 6b − 5c



58. Una pieza de tela tiene una longitud de 1 hm, 3 dam y 5 m, si se vendieron 0,95 hm 2,5 dam y 3 m y se dañaron $\frac{2}{5}$ de dam de tela. La cantidad de tela que sobró de la pieza original es:

A. 4 m

B. 7 m

C. 8 m

D. 22 m

59. 0,03 km, 0,25 hm, 0,7 dam equivale en cm a:

A. 8 400

B. 7 500

C. 6 500

D. 6 200

60.

Intervalo	Marca de clase	f_i
[100, 150)	125	2
[150, 200)	175	3
[200, 250)	225	4
[250, 300)	275	2
[300, 350)	325	4

A partir de la información de la tabla, se puede decir que:

A. 5 datos son menores que 250

B. 3 datos son menores que 250

C. 9 datos son menores que 250

D. 2 datos son menores que 250

61. Si un experimento consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene cinco bolas rojas, tres azules y una amarilla, la probabilidad de que sea roja es:

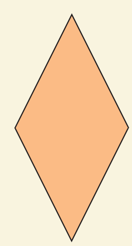
A. $\frac{5}{9}$ **B.** $\frac{3}{9}$

C. $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{4}{9}$

62. ¿Cuántos ejes de simetría tiene la siguiente figura?

A. 1 **B.** 2

C. 3 **D.** 4



63. El área en cm^2 de la figura es:

A. 4 π

B. 6 π

C. 7 π +2

D. 6 + π

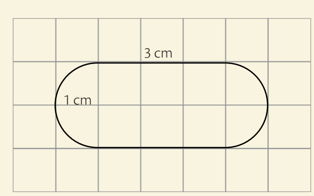


Tabla de respuestas

56	57	58	59	60	61	62	63
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

64. El área total de una pirámide cuadrangular cuya arista básica es 20 cm y su altura de la cara mide 50 cm es:

A. 1 400 cm^2

B. 2 400 cm^2

C. 3 800 cm^2

D. 4 400 cm^2

65. El área en cm^2 de un cono de 10 cm de diámetro y 15 cm de generatriz es:

A. 25 π

B. 75 π

C. 90 π

D. 100 π

66. El rango de gastos de una familia que gasta semanalmente entre \$ 356 y \$ 567 es:

A. \$ 923

B. \$ 211

C. \$ 356

D. \$ 567

67. Si a es una cantidad que recibo, *b* una cantidad que pago, *c* una cantidad que recibo y *h* lo que me queda, la expresión matemática de lo que me queda es:

A. $h = b + c - a$ **B.** $h = a + b - c$

C. $h = c + a - b$ **D.** $h = a - b - c$

68. De una distancia de *a* metros se recorrieron *n* metros. La expresión matemática que indica la distancia que falta por recorrer es:

A. Distancia = n **C.** Distancia = $a + n$

B. Distancia = $n - a$ **D.** Distancia = $a - n$

69. Tengo una cantidad de dinero *d* y hago un préstamo *p* para comprar $(a + b)$ libros. La expresión que indica el valor de cada libro es:

A. $\frac{d+p}{a+b}$ **C.** $\frac{d}{d+p}$

B. $\frac{a+b}{d+p}$ **D.** $\frac{p}{a+b}$

70. Son puntos simétricos con respecto al eje *y* del plano cartesiano:

A. (2, 3) y (−2, 3)

B. (−2, −3) y (2, 3)

C. (2, −3) y (2, 3)

D. (−2, 3) y (−2, −3)

Tabla de respuestas

64	65	66	67	68	69	70
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D

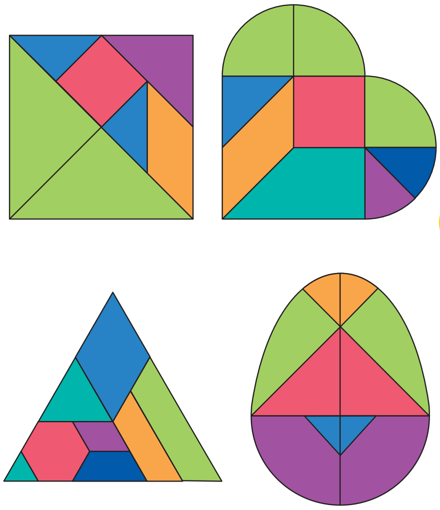
Indicadores para la evaluación:

- Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros, establece relaciones de orden empleando la recta numérica, aplica las propiedades algebraicas de los números enteros en la solución de expresiones con operaciones combinadas empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología.
- Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números enteros y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita, juzga e interpreta las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones.
- Utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional.
- Construye figuras simétricas, resuelve problemas geométricos que impliquen el cálculo de longitudes con la aplicación de conceptos de semejanza y la aplicación del teorema de Tales.
- Demuestra el teorema de Pitágoras valiéndose de diferentes estrategias y lo aplica en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas de pirámides, prismas, conos y cilindros.
- Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas (histogramas, polígono de frecuencias, ojiva y/o diagramas circulares) con el uso de la tecnología; interpreta funciones.
- Utiliza información cuantificable del contexto social, utiliza variables, aplica niveles de medición, calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar).

Elabora un vitral con las piezas de un tangram

Los vitrales son representaciones policromadas (pintadas o decoradas de muchos colores), figurativas (que representan personas, animales u objetos reales) o abstractas que se hacen sobre el vidrio y que atienden en su mayoría a temáticas religiosas. A continuación conocerás el paso a paso para elaborar un vitral figurativo empleando alguno de los tipos de tangram conocidos y así podrás organizar una galería de arte con tus compañeros.





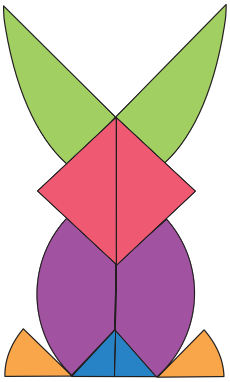
El tangram

El tangram es un juego que apareció hace aproximadamente 300 años y que consiste en formar siluetas de figuras con todas las piezas que lo componen, sin solaparlas. El tangram más conocido es el chino, que tiene siete piezas; sin embargo, existen otros muy utilizados que son: el cardiotangram (forma de corazón), el ovotangram (forma de huevo) y el tangram triangular, entre otros.

1 ¿Qué necesitas?

Los materiales para elaborar tu vitral son los siguientes:

- Un vidrio
- Líquido limpiavidrios
- Hoja de papel blanco
- Pintura para vitrales
- Cinta de enmascarar delgada
- Trapo de tela limpio
- Lápiz, marcador negro y regla
- Delineador para vitrales
- Pinceles
- Tangram (opcional)



2 Elabora el vitral

1. Escoge el tipo de tangram con el que trabajarás y busca en internet figuras humanas, de animales u objetos que se construyan con él. Elige la figura que más te guste.

2. Dibuja en la hoja de papel la figura que escogiste; para ello utiliza regla y lápiz. Si escogiste trabajar con el ovotangram o el cardiotangram también debes utilizar el compás para dibujar la figura, ya que algunas piezas de estos tangrams son figuras circulares. Cuando ya tengas tu diseño, repísalo con el marcador negro.

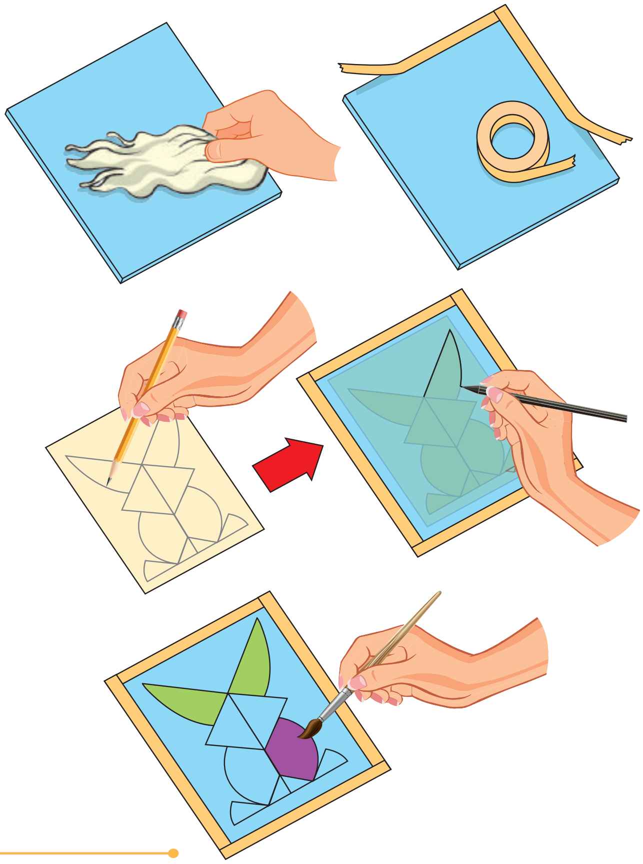
3. Limpia el vidrio con el trapo y el líquido limpiavidrios para dejarlo libre de impurezas como grasa, polvo, etc.

4. Delimita un marco para tu vidrio con la cinta de enmascarar por si algún día quieres enmarcar tu vitral. Fija con cinta sobre la mesa la figura que dibujaste en la hoja de papel.

5. Pon el vidrio sobre el diseño en el lugar que deseas que quede ubicada la imagen y fíjalo con la cinta a la mesa.

6. Toma como guía el diseño realizado en la hoja blanca y dibuja sobre el vidrio con el delineador para vitrales tu figura. Ten en cuenta que el tiempo de secado del delineador es de 2 a 4 horas.

7. Toma los pinceles y empieza a darle color a tu vitral. Empieza por los colores más claros y culmina con los más oscuros; esto te permitirá lograr degradados o entremezclar los colores. Finalmente, deja secar y tendrás tu vitral terminado.



3 Organiza la galería de arte

1. Decide con tu profesor y compañeros el lugar del colegio más apropiado para presentar sus vitrales.

2. Piensa en un nombre para tu vitral y redacta una breve descripción del mismo, así como se hace con los cuadros de los grandes artistas cuando presentan sus obras en diversas galerías.

3. Invita a la exposición a los estudiantes de otros cursos y a los demás profesores. Cuando sea tu turno de exponer, explica las figuras geométricas que componen la figura de tu vitral.

Los vitrales y las matemáticas

Las figuras geométricas ubicadas de una forma apropiada pueden dar forma a toda clase de imágenes figurativas que sirven de diseños para los vitrales (como pudiste observar al hacer la búsqueda en internet sobre las figuras que se pueden construir con los distintos tipos de tangram).

1. Redacta un escrito en el que expliques por qué consideras que las figuras geométricas son una base para la elaboración de imágenes figurativas.

2. Consulta los pasos para construir uno de los tangram. Luego, constrúyelo, juega con él, crea un diseño propio y elabora otro vitral.



Glosario

A

Ábaco. Cuadro construido en madera utilizado para contar. Tiene dispuestas barras de fichas a las que se les asignan unidades, decenas, centenas, etc., para hacer cálculos.

Aleatorio. Experimento cuyos resultados no se pueden predecir.

Algoritmo. Descripción paso a paso del procedimiento para efectuar una operación.

Altura. Perpendicular trazada desde la base de una figura al vértice opuesto.

Ángulo. Unión de dos semirrectas con un origen común.

Ángulo agudo. Ángulo cuya medida es menor que 90º.

Ángulo diedro. Es el ángulo formado por dos semiplanos que se cortan. La recta formada por la intersección de estos semiplanos se denomina arista.

Ángulo llano. Ángulo que mide 180º.

Ángulo obtuso. Ángulo cuya medida es mayor que 90º.

Ángulo recto. Ángulo cuya medida es 90º.

Ángulos adyacentes. Ángulos con el vértice y un lado común, cuyos lados no comunes están en lados opuestos con respecto al lado común.

Ángulos complementarios. Ángulos cuyas medidas suman 90º.

Ángulos congruentes. Ángulos que tienen la misma medida.

Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos con el vértice común de tal manera que la prolongación de los lados de uno son los lados del otro.

Ángulos suplementarios. Ángulos cuyas medidas suman 180º.

Apotema. Segmento que une el centro de un polígono regular con el punto medio de uno de sus lados.

Aproximar. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.

Arco. Segmento de circunferencia delimitado por dos puntos.

Área. Medida de la superficie de una figura plana.

Arista. Segmento en el que se intersecan dos caras de un poliedro.

Aritmética. Rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números, sus operaciones y sus propiedades.

B

Baricentro. Punto de corte de las medianas de un triángulo.

Binario. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 1 y 0.

Bisectriz. Semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

C

Cara. Cada una de las regiones poligonales que delimitan un poliedro.

Cifras decimales. Cifras que se encuentran a la derecha de la coma en un número decimal.

Cilindro recto. Sólido de revolución formado por un rectángulo que gira sobre sus lados.

Círculo. Región del plano delimitada por una circunferencia.

Circuncentro. Punto donde se intersecan las mediatrices de un triángulo.

Circunferencia. Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Conjunto. Colección bien definida de objetos.

Conjunto unitario. Conjunto finito que tiene exactamente un elemento.

Conjunto vacío. Conjunto que no tiene elementos.

Conjuntos disyuntos. Conjuntos que no tienen elementos comunes.

Conjuntos intersecantes. Conjuntos que tienen elementos comunes.

Criterio de divisibilidad. Regla mediante la cual se determina si un número es divisible por otro, sin hacer la división.

Cuadrilátero. Polígono de cuatro lados.

D

Dato. Cantidad o medida obtenida de la observación, comparación y aplicación de encuestas.

Decimal. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Diagonal de un polígono. Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

Diagrama de barras. Representación gráfica en forma de barras rectangulares o columnas que facilita el análisis de un conjunto de datos.

Diámetro de la circunferencia. Segmento que une dos puntos distintos de la circunferencia y pasa por el centro de la misma.

E

Ecuación. Igualdad entre dos expresiones que contienen uno o varios términos desconocidos.

Eje. Línea recta que sirve de referencia para construir un sistema de coordenadas.

Eje de simetría. Recta que divide una figura en dos partes iguales.

Elemento. Objeto que pertenece a un conjunto.

Esfera. Sólido de revolución que resulta al girar un semicírculo sobre su diámetro.

Espacio muestral. Conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento.

Estadística. Rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, representación, análisis, interpretación y aplicaciones de datos numéricos a través de un conjunto de técnicas con rigor científico.

Evento (o suceso). Resultado posible en un experimento aleatorio.

F

Factor primo. Un número primo es factor de un número natural si el número natural es divisible por dicho número primo.

Figuras semejantes. Figuras que tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Fracción impropia. Fracción en la que el numerador es mayor que el denominador.

Fracción irreducible (o irreductible). Fracción en la que el numerador y el denominador no tienen factores comunes.

Fracción propia. Fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Fracciones que representan la misma parte de la unidad.

Frecuencia absoluta. Número de veces que se repite determinado valor en la variable estadística que se estudia.

Frecuencia acumulada. Suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

Frecuencia relativa. Cociente entre la frecuencia absoluta y el número de individuos de la población en un estudio estadístico.

G

Gráfica circular (diagrama de sectores). Gráfica que ilustra proporciones como sectores de un círculo cuyas áreas relativas representan las distintas proporciones.

Gramo. Unidad de masa del Sistema Internacional de Unidades.

H

Hectárea. Unidad de área equivalente a un cuadrado de cien metros de lado.

Heptágono. Polígono de siete lados.

Hexágono. Polígono de seis lados.

Hipotenusa. Lado que se opone al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Histograma. Representación gráfica de las frecuencias de datos agrupados en clases, mediante rectángulos, en un sistema de coordenadas.

I

Igualdad. Relación entre dos expresiones idénticas.

Intersección de conjuntos. Conjunto formado por los elementos comunes a los conjuntos dados.

L

Lado de un polígono. Segmento que une dos vértices consecutivos.

Longitud. Magnitud de las líneas.

M

Marca de clase. Punto medio de un intervalo de clase.

Máximo común divisor. Mayor de los divisores comunes de dos o más números.

Media aritmética. Promedio de un grupo de datos que se obtiene al calcular la suma de todos los valores y dividirla por el número de datos.

Mediana de un triángulo. Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Mediatriz de un segmento. Recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

Mediatriz de un triángulo. Recta perpendicular a un lado del triángulo, que pasa por su punto medio.

Medida de dispersión. Valor que indica la variabilidad de los valores de un conjunto de datos.

Medida de tendencia central. Valor alrededor del cual se concentran los valores de un conjunto de datos.

Moda. Valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

Muestra. Parte de una población que la representa en un estudio estadístico.

Múltiplo. Número que se obtiene al multiplicar un número natural dado por 1, 2, 3, 4…

N

Numerador. En una fracción es el número superior. Indica las partes que se toman de la unidad.

Número compuesto. Número que puede expresarse como el producto de números primos.

Número decimal. Expresión numérica formada por una parte entera y una parte decimal separadas por una coma.

Número decimal exacto. Decimal con un número finito de cifras.

Número decimal periódico. Número decimal cuya parte decimal contiene una cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente. El grupo de cifras que se repite se llama período.

Números primos. Números que tienen solo dos divisores: la unidad y el mismo número.

O

Octágono. Polígono de ocho lados y ocho ángulos.

Orden de las operaciones. Conjunto de reglas que indican el orden en que se deben realizar operaciones en una expresión con operaciones combinadas.

Origen de coordenadas. Punto de intersección de los ejes de coordenadas.

Ortocentro. Punto donde se intersecan las tres alturas de un triángulo.

P

Pareja ordenada. Dupla formada por dos elementos en la que el orden es determinante. Las coordenadas de un punto se representan mediante una pareja ordenada.

Perímetro. Medida del contorno de una figura poligonal cerrada.

Población. Conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono. Línea poligonal cerrada.

Polígono regular. Polígono en el cual son iguales las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos interiores.

Primos relativos. Aquellos números cuyo único divisor común es 1.

R

Radio. Distancia del centro de un círculo a un punto de su circunferencia o del centro de una esfera a un punto de su superficie.

Rectas paralelas. Líneas rectas que no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares. Líneas rectas que, al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.

Rectas secantes. Líneas rectas que se cortan en un punto único.

S

Segmento. Es la parte de la recta que está delimitada por dos puntos (los cuales son los extremos del segmento).

Subconjunto. Un conjunto *A* es subconjunto de un conjunto *B* si todos los elementos de *A* están en *B*.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá, 1999.
- Alem, Jean Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme, y Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Síntesis, Madrid, 1995.
- Boyer, Carl B. *Historia de las matemáticas*. Alianza Editorial, España, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Síntesis, Madrid, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Editorial Síntesis, España, 1997.
- Clements et al. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.
- De Prada, V. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, 1990.
- Dickson, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.
- Fournier, Jean Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.
- Jovette, André. *El secreto de los números*. Editorial Intermedio, Bogotá, 2002.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.
- Küchemann, D. *The meaning children give to the letters in generalised arithmetic*. En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Mec/Labor, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santafé de Bogotá, D. C., Colombia, 1998.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.
- Perelman, Y. *Aritmética recreativa*. Mir, Moscú, 1986.
- Pérez, A., Bethencourt, M., Rodríguez, M. (2004). *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. Mc Graw Hill, México, 1991.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*. Limusa, México 1983.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías y otros. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, S. A., México, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. Mc Graw Hill, México, 1975.
- Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Limusa, México, 1988.
- Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. Mc Graw Hill,Colombia, 2000.

Webgrafía

- BancodeObjetosMultimediaEducativos.[Consulta:mayode2015] en:http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/eltanquematematico/
- Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015] en: http://www.genmagic.net/
- El cine en 3D. ¿cómo funciona?. [Consulta: abril de 2015] en http://e-ciencia.com/blog/curiosidades/el-cine-en-3d
- ¿Cómo medir la intensidad y magnitud de huracanes?. [Consulta: abril de 2015] en http://educarseeducarte.blogspot.com/2010/12/como-medir-la-intensidad-y-magnitud-de_9964.html
- Diccionario de la lengua española. [Consulta: mayo de 2015] en: http://www.rae.es/
- "Disfruta las matemáticas". [Consulta: mayo de 2015] en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/
- "Geometría recreativa de Yacob Perelman". [Consulta: mayo de 2015] en http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf
- La geometría que nos rodea. [Consulta: abril de 2015] en http://issuu.com/aliciaurbano/docs/cat__logo_pfc3
- El riesgo en la inversión. [Consulta: abril de 2015] en http://www.inosanchez.com/files/mda/fpenf/i_05_el_riesgo_en_la_inversion_w.pdf
- Perspectiva Mundial sobre la Diversidad Biológica 3. [Consulta: abril de 2015] en https://www.cbd.int/doc/publications/gbo/gbo3-final-es.pdf